向量几何的魅力

——追忆著名教授陈昌平的向量情结

200062 华东师范大学数学系 邹一心 忻重义 何福昇

原全国中小学教材审定委员会审定委员、中小学数学学科审查委员、上海市一期课改数学教材主编陈昌平教授生前曾有一封书信, 写给当时参加编写向量与立体几何的有关同志, 言简意赅地刻画了向量几何的魅力, 并在信中亲自用坐标向量方法解答了有关高考题.

现将历史镜头退回到1995年. 当时的课程改革, 在一般人的心目中, 大多专心聚焦在几千年古老的平面几何的改革上, 而对于三大能力中的空间想象力的培养, 则认为只有综合立体几何才能担此重任, 舍此别无他法. 于是顺理成章地认为, 只需在立体几何原有课本的基础上"修修补补、填平补缺", 而不必"伤筋动骨", 至于向量的教学, 则认为应该是大学的事.

虽然现在高中已普及向量, 但十年前向量却还披着神秘的面纱. 然而, 陈先生借鉴发达国家的有益经验, 具有开拓创新的现代超前意识, 极力呼吁向量几何能正式进入教材. 今将从未公开发表过的该信原件刊登如下:

今天, 我把《数学教学》杂志上所见到的1991至1994年四年间高考全国统一卷和上海卷上的立体几何题目共八道, 全部用坐标向量方法解出来了. 目的是想说明:

尽管坐标向量几何方法主要是建立在计算上, 计算工作比较多, 但由所做的可见, 也不比综合几何法的计算繁得多少. 但这不是主要的. 按理说, 一般用综合法计算量要少些. 我想要着重说明的是以下两点:

(1) 坐标向量法节省思维——是通性通法, 方法是现成的、规范的, 用不着临时挖空心思去找各种关系. 一般地, 建立了坐标系便可着手计算. 由计算结果得出几何结论(这就是"算法数学"的优点).

(2) 最为重要的是: 综合立体几何的方法是强弩之末. 它到顶了, 再没有发展前途了, 学到此为止了(和综合平面几何性质是不一样的), 学完了也就完了. 相反, 坐标向量法是初生之犊, 是一种新方法的起点, 以后在大学数学中或数学应用中都是用这一套方法.

鉴于以上想法, 我殷切期望您们能照我的意见, 在选修课里讲"坐标向量几何", 不要再拿综合法去使学生犯难了. 让他们学点有生命力的生动活泼点的东西.

当否, 请酌.

陈昌平

1995.8.6.

重温上述信件, 琢磨陈先生的原意, 我们能否作如下依样画瓢的理解: 向量几何的魅力主要来自如下三个方面:

1. 魅力来自坐标——向量的算法性

由于建立了直角坐标系, 使得"点"与"向量"即"数组"对应, 使几何中的"点"参与代数运算, 于是, 几何问题代数化, 减少了空间几何的思辨性.

2. 魅力来自方法——广泛的应用性

学习综合几何的推理论证, 主要宜在初中学习平面几何中完成, 而在高中开始直至今后读大学, 应重视学习另一种新的数学思想方法——向量方法——在数学应用中更广泛的一种方法.

3. 魅力来自模式——思维的规范性

向量几何中有现成的夹角公式、距离公式、

法向量的计算公式, ⋯⋯, 往往能避免应用诸如三垂线定理, 避免构作辅助面, ⋯⋯, 掌握解题的通性通法.

为了具体说明向量几何的魅力, 陈先生不惜精力, 亲自示范做了上海市8道高考题. 其中1994年高考上海卷第23题是:

如图1, $AD/\!/BC$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$, $AB=a$, $AD=3a$, $\angle ADC=\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$, $PA\perp$平面$ABCD$, $PA=a$.

(1) 求二面角$P-CD-A$;

(2) 点A到平面PBC的距离.

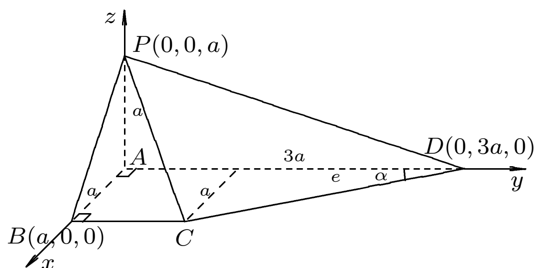


图 1

现用陈先生当时使用的原式原样的符号语言及图象语言的草稿原件, 一字未改地将他当时的解答全文照抄如下:

【解】(1) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\tan\alpha=\frac{a}{e}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}=\frac{1}{2}$, $e=2a$.

取坐标如图1, 则易于计算得$BC=a$.

于是 $\overrightarrow{PC}=(a,a,-a)$, $\overrightarrow{PD}=(0,3a,-a)$.

$$\overrightarrow{n}_{PCD}=\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PD}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a & a & -a\\ 0 & 3a & -a\end{vmatrix}$$

$$=(2a^2,a^2,3a^2)=a^2(2,1,3).$$

$\widehat{n}_{PCD}=\frac{1}{\sqrt{14}}(2,1,3)$, $\widehat{n}_{DAC}=(0,0,1)$.

记$\beta=\angle(P-CD-A)$, 则

$\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$,

$\beta=\arccos\frac{3\sqrt{14}}{14}\left(=\arctan\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

(2) A到PBC的距离.

$$\overrightarrow{n}_{PCD}=\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}=(a,0,-a)\times(a,a,-a)$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a & 0 & -a\\ a & a & -a\end{vmatrix}=(a^2,0,a^2)=a^2(1,0,1),$$

$\widehat{n}_{PBC}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$.

所求距离$=\overrightarrow{AB}$在$\widehat{n}_{PBC}$上的投影

$=(a,0,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

在陈先生的大声疾呼下, 在全国范围内, 在上海一期课改的教材中, 首次出现向量的内容. 该内容虽已从无到有, 但仅有数量积而无向量积. 后陈先生虽又精心主编了《高中数学选修读本》(上、下册), 其中已有用行列式形式表示的法向量, 但《选修读本》纯属民间教辅读物. 然而, 时至今日, 全国各套数学教材中, 数量积、法向量等概念已一应俱全, 从而朝着空间向量与立体几何教学融为一体的方向前进了一大步.

上海中学数学教材改革, 在十多年前早已启动, 且二期课改教材的编写在一期的基础上, 承前启后地进行. 当年陈先生的设想及追求, 现在已正式进入了教材. 在编写向量几何问题上也算心想事成, 圆了陈先生一梦.

由于我们跟随陈先生整整十年参加上海一期课改数学教材的编写, 在长期接触中, 深感陈先生为人正直, 治学严谨、创新, 这些都是我们晚辈学习的楷模, 为此专作本文, 以此告慰九泉.

参考文献:

1. 1994年全国普通高等学校招生统一考试上海数学试题. 数学教学. 1994年第4期.

2. 陈昌平主编.《高中数学选修读本》(上、下册). 上海科技教育出版社. 1996年.

3.《国家高中数学课程标准》制定组.《高中数学课程标准》的框架设想. 数学教学.2002年第2期.

4. 张奠宙. 2004年数学教育高级研讨班纪要. 数学教学. 2005年第2期.

5. 赵小平. 把空间向量融入立体几何教学的一种教材设计. 数学教学. 2005年第5期.

新课标与几何作图

225008 江苏省扬州新东方中学 袁 桐 江苏省扬州市梅岭中学 王力耕

江苏省扬州市第一中学 崔蓉蓉

义务教育数学课程标准的图形与变换部分加入了平移、对称、旋转这些变换工具. 一方面回避了"全等形"的路线, 叙述简洁, 又与实际联系; 另一方面又根据克莱茵的分类原则, 突出了初等几何的本质. 尽管后面还要介绍全等形的理论, 但仍然从平移、对称、旋转出发.

从教学的角度看, 用新的观点去处理几何问题, 本质上是个提高. 事实上很多证明题, 恰恰是过去学生不会去思考的, 尤其是一些竞赛问题, 常常从旋转出发, 现在学生头脑里单纯了, 反而容易思考. 平面几何的证明题如此, 作图题也如此.

例1 已知AB、CD两条线段, 不许延长, 作出AB与CD相交所成角的平分线.

分析: 本题有个限制条件:不许延长. 我们可以考虑用平移的办法.

作法: 平移AB、CD(如图2), 要求AB与OE、CD与OF的距离相等, 作$\angle EOF$的平分线即为所求.

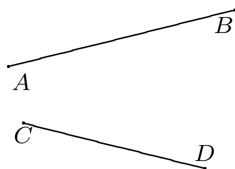


图 1

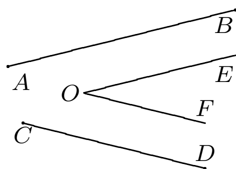


图 2

例2 已知两平行线a、b和不在它们上面的一点A, 试过A点作一直线, 使它被a、b截得的线段长为l.

分析: 可以先放弃"过点A"的条件.

作法: 如图3, 在直线b上取点B, 以B为圆心, l为半径作弧交a于C、D, 再将BD(或BC)平移到A处.

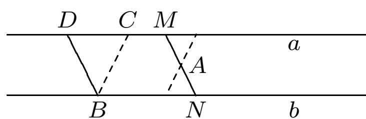


图 3

例3 在已知角$\angle MON$内一点P(如图4), 在OM、ON上各求一点P_1、P_2, 使得$\triangle PP_1P_2$的周长最短.

分析: 要取对称点, 把周长转化为线段长.

作法: 取P点关于OM的对称点A, P点关于ON的对称点B, 连AB, 设交OM、ON于P_1、P_2即为所求.

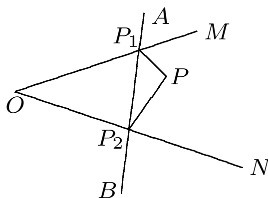


图 4

注: 本文中略去讨论, 着重"做数学".

例4 已知交于点O的三条直线OX、OY、OZ及线外一点P. 求作$\triangle ABC$, 使OX、OY、OZ恰好为$\triangle ABC$的三个内角的平分线, 且AB过P点.

分析: 充分利用轴对称的性质.

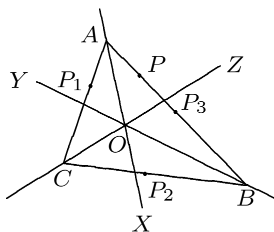


图 5

作法: 取P点关于OX的对称点P_1(如图5), 再取点P_1关于OZ的对称点P_2, 再取点P_2

关于OY的对称点P_3, 连结PP_3交OX于A, 交OY于B, 连结AP_1交OZ于C. $\triangle ABC$为所求.

例5　已知三条互相平行的直线a、b、c, 试作等边三角形, 使其三顶点分别在a、b、c上.

分析: 如果$\triangle ABC$已经作出, 如图6. 作$AD\perp b$, 交b于D点.

当我们将$\triangle ABC$绕A点顺时针旋转$60°$时, Rt$\triangle ADB$跟着旋转到$\triangle AD'C$处, 因此, 可以确定点C.

作法: 在直线a上取点A, 作$AD\perp b$, D为垂足, 再作$AD'=AD$, 且$\angle DAD'=60°$, 过点D'作$D'C\perp AD'$, 交直线c于点C, 则AC为正三角形的边长. 以AC为半径、A点为圆心画弧, 交直线b于点B, $\triangle ABC$即为所求.

当然, AD'可以在AD的右侧, 也可以在AD的左侧, 确定了A点就有两解.

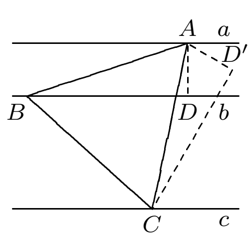


图6

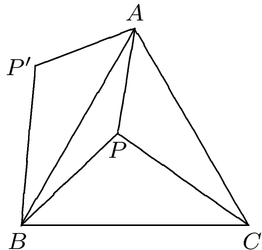


图7

例6　已知定点P到正$\triangle ABC$三顶点的距离分别为4、5、6, 求作正$\triangle ABC$.

分析: 本题的含义就是要从$PA=4$, $PB=5$, $PC=6$, 求出正$\triangle ABC$的边长. 不妨设正$\triangle ABC$已经作出, 如图7, 将$\triangle APC$绕A点顺时针旋转$60°$, 到$\triangle AP'B$处, 连$P'P$, 易知$\triangle AP'P$为正三角形, 而$P'B=6$, $P'P=4$, 于是得到作法.

作法: 作以4、5、6为边的$\triangle BP'P$(其中$P'P=4$, $PB=5$, $P'B=6$), 在形外作正$\triangle P'PA$, 连AB, 则AB为正三角形的边长, 再以AB为边作出正$\triangle ABC$ (使点P在$\triangle ABC$内部).

例7　已知$\angle MON$内有一定点P, 试在OM、ON上分别找一点A和B, 使$\triangle APB$为等腰直角三角形(要求$PA=PB$, $PA\perp PB$).

分析: 如果等腰Rt$\triangle APB$已作出, 作$PC\perp OB$. 若将PB顺时针旋转$90°$时, PB就到了PA处, 此时Rt$\triangle PCB$就到了$\triangle PDA$处. 因此得到作法.

作法: 如图8, 作$PC\perp ON$, C为垂足, 作$PD\perp PC$且$PD=PC$, 再过D作ON的垂线交OM于A点, 再作$PB\perp PA$, B在ON上, 则Rt$\triangle PAB$即为所求.

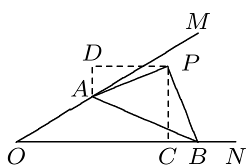


图8

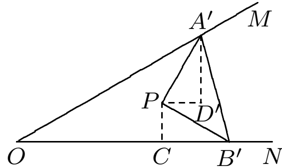


图9

注: 如图9, 也可以在PC的另一侧取$PD'=PC$, 且$PD'\perp PC$, 过D'作$D'A'\perp ON$, A'在OM上, 确定PA'后, 也可以作出等腰Rt$\triangle A'B'P$.

有关旋转的作图问题, 其本质是"整个图形绕旋转中心旋转". 因此可以采用透明纸, 固定旋转中心, 作出图形.

这些方法, 对于只学旧教材的人来说, 是不容易想到的. 我们应认真学习新课标的几何结构, 努力提高新课标教学的"数学性".

~~~~~~

(上接第8–46页)

我是唯一来自大陆的演讲者. 由于视角不同, 演讲的内容也比较特别. 我首先简单地介绍了今年在课程标准上出现的论战. 然后重点谈"数学教学中如何呈现数学本质". 演讲用16个例子说明怎样做可以呈现数学本质, 如何做则淹没了数学本质. 我还着重对近年来过度追求表面热闹, 而忽视数学本质的倾向进行了评述. 原以为这种观点在香港也许不大容易接受, 结果却得到相当的重视, 至少是一种不大听到的"新"的声音.

9日搭快船去澳门, 结束了香港行.
~~~~~~

立体几何例、习题的改造

710003 陕西省西安中学 薛党鹏

在长期的教学实践中, 笔者发现, 如果能够对于部分传统的数学问题予以适当的改造, 则往往可以极大地调动学生解决问题以及学习数学的兴趣. 现以立体几何中部分例、习题的改编为例, 做一简要介绍.

一、封闭性问题的开放性改造

以问题状态(条件、过程、结论)的明确度为依据, 我们可以将数学问题分为封闭性问题和开放性问题[1]. 我们平时所见到的例、习题大都属于封闭性问题. 而开放性问题则对于发展学生个性, 优化学生思维品质, 特别是训练学生的发散性思维、创造性思维有着重要的意义. 对于封闭性问题, 如果我们在认清题目实质的情况之下, 对于问题的条件、结论或者过程予以适当地修改, 则可以使其具有一定的开放性.

题1–1 如图1, 四面体$ABCD$中, E、F、G、H分别为棱AB、CD、BC、AD的中点, 求证: 面$EHFG$将四面体$ABCD$均分为体积相等的两个部分.

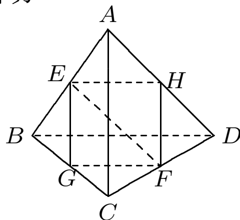


图 1

如果认识到经过EF且平分四面体体积的平面具有多样性, 那么就可以将此题改编为下述的开放性问题, 以使得每位学生都能够得到较大可能的发展.

题1–2 如图2, 四面体$ABCD$的棱AB、CD的中点分别为E、F, 经过EF你能够作出一截面, 使得该截面将此四面体分为两个等体积的部分吗?

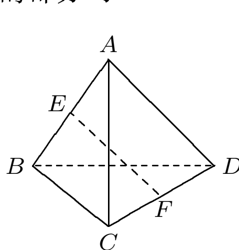


图 2

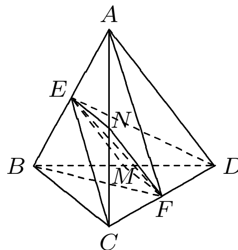


图 3

笔者将题1–1改编为题1–2后, 在所教班试验, 结果100%的学生找到了图3中的面ECD、面FAB; 面$EMFN$ (M、N分别为BD、AC的中点)以及题1–1中的面$EHFG$. 另有30%的学生得到了一般性结论, 即下述推广问题.

题1–3 设E、F为一四面体的一组对棱中点, 则任意一个经过EF的截面都将此四面体的体积二等分.

证明: 如图4, 设截面为$EQFP$, $\dfrac{DQ}{AQ}=k$, 用d_X表示点X到截面$EQFP$的距离, 则$k=\dfrac{DQ}{AQ}=\dfrac{d_D}{d_A}=\dfrac{d_C}{d_B}=\dfrac{PC}{BP}$. 所以$\dfrac{PC}{BC}=\dfrac{k}{k+1}$. 设$\triangle BCD$的面积为$S$, A到平面BCD的距离为h, 则

$$\begin{aligned}V_{A-PCF}&=\frac{1}{3}S_{\triangle PCF}h\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot S\right)h\\&=\frac{k}{2(1+k)}V_{A-BCD},\end{aligned}$$

同理得$V_{F-AEQ}=\dfrac{1}{4(1+k)}V_{C-ABD}$,

$V_{F-AEP}=\dfrac{1}{4(1+k)}V_{D-ABC}$,

三式相加得$V_{AEPCFQ}=\dfrac{1}{2}V_{ABCD}$.

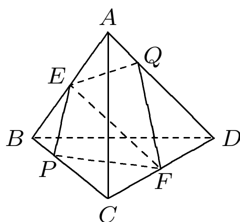
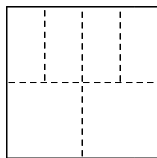
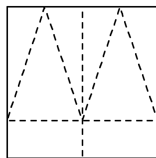


图 4

题2–1 将一边长为$4a$的正方形纸片按照图5中的虚线所示的方法剪开后拼接为一正四棱柱, 设其体积为V_1. 若将同样的正方形纸片按照图6中虚线所示的方法剪开后拼接为一正四棱锥, 设其体积为V_2. 试比较V_1和V_2的大小.


图 5


图 6

此题将几何体的拼接方法予以了限制, 从而也就限制了学生的思维, 错过了一次培养学生创新意识和实践能力的机会. 如果我们对于正方形的裁剪方法不加限制, 而任由学生去设计, 则可以将原问题改造为下述题目.

题2–2 甲、乙是两个边长都为$4a$的正方形纸片. 现在要将甲裁剪后拼接为一底面边长为$2a$的正四棱柱, 将乙裁剪后拼接为一底面边长为$2a$的正四棱锥, 使得它们的表面积都等于一个正方形的面积(不计拼接误差).

(1)将你的裁剪方法用虚线标在图中, 并做简要的剪拼说明;

(2)试比较你所拼接的正四棱柱与正四棱锥的体积大小, 并证明你的结论.

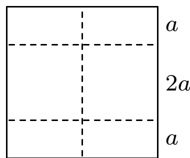


图 7

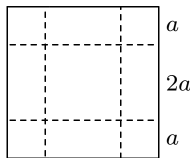


图 8

限制条件的适度放宽, 使得问题存在多种答案, 具有了一定的开放性, 从而充分调动了学生的思维积极性, 得到了许多种裁剪方法, 如图7、图8等所示的正四棱柱裁剪方法, 图9~图11等所示的正四棱锥裁剪方法.

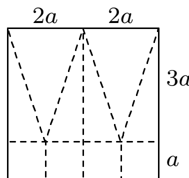


图 9

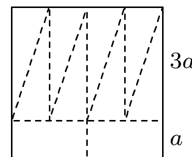


图 10

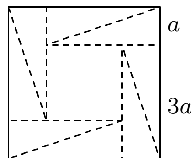


图 11

当然, 对于此题我们也可以去掉正四棱柱、正四棱锥的底面边长的限制, 将题目改编为自由度更大的开放性问题.

二、常规型问题的探索性改造

以问题解决者的知识经验为依据, 我们可以将数学问题分为常规性问题与探索性问题[1]. 我们平时所见到的例、习题大都是常规性问题. 而探索性问题对于培养学生的探究能力, 激发学生的学习兴趣与主动性有着常规性问题不可比拟的作用. 改变常规性问题的条件、结论或者设问方式, 就可以将常规性问题改编为探索性问题.

题3–1 如图12, 在正四棱锥$S-ABCD$中, 设E、N、G分别是BC、CD、SC的中点, 设P点为线段NG上任意一点, 求证: $PE \perp AC$.

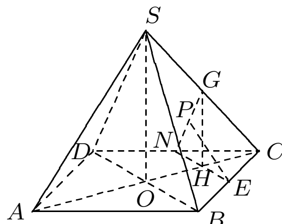


图 12

考虑到P点在NG上的任意性, 我们则可以逆向思维, 运用轨迹的思想居高临下地将此题改编为下述具有一定探索性的问题.

题3–2 如图13, 在正四棱锥$S-ABCD$

中, E是BC的中点, P点在侧面SCD内及其边界上运动. 那么当P点在何位置时可以保证$PE \perp AC$?

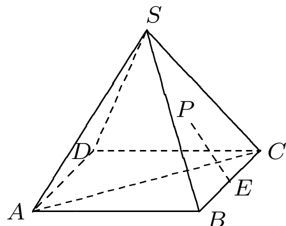


图 13

当笔者将题3–2呈现给学生时, 发现有近$\frac{1}{3}$的学生依靠直觉得到了结论, 并对于轨迹的纯粹性予以了论证(即在猜想得到结论后, 完成了题3–1), 但是忽视了P点轨迹的完备性, 这表明这些学生对于轨迹的思想还没有完全领会; 有一半的学生则运用严密的逆向思维得到了完整的问题解决.

题4–1 求证: 四面体的内切球半径$r = \frac{3V}{S}$, 其中V和S分别为四面体的体积和全面积.

立体几何的许多结论都可以看作平面几何结论的推广, 认识到这点以后, 即可将此题改编为下述具有一定的探究性的类比型题目.

题4–2 关于三角形, 我们有结论: 任何三角形都有内切圆, 而且内切圆的半径$r = \frac{2S}{c}$(其中, S和c分别为三角形的面积与周长)类比此结论, 对于四面体, 你有何猜想?你能够证明或者否定你的猜想吗?

三、纯粹型问题的应用性改造

以问题性质的数学过程(抽象、变换、应用)为依据可以将数学问题分为纯粹性问题和应用性问题[1]. 我们平时所见到的例、习题大都是纯粹性问题. 而应用性问题对于培养学生的数学建模能力、分析问题与解决问题的能力都有着不可替代的作用. 对于一些纯粹性问题, 如果能够结合具体的生活、生产实践, 赋予其一定的实际情景, 则可以将其改编为应用性问题.

题5–1 与几何体的每一条棱都相切的球称为该几何体的棱切球, 试求棱长为a的正方体的棱切球与外接球的表面积之比.

认清四面体的棱切球、外接球与四面体的位置关系之后, 我们就可以具体的正方体模型为载体, 将此题目改编为下述有趣问题.

题5–2 用12根长度均为a的铁棒焊接为一正方体框架. 若忽略铁棒的粗细以及焊接误差, 那么此框架能够容纳得下的最大球体与能够容纳得下此框架的最小球体的体积分别为多少?

笔者在自己所带的两个班进行了对比试验, 结果显示题目5–2的应用性与趣味性, 使得学生解决问题时的路径远比题目5–1宽阔.

题6–1 如图14所示, 在三棱锥$A-BCD$中, 已知A到面BCD的距离为$50\sqrt{3}$, 长为200的侧棱AB和BC所成的角为30°, 试求侧面ABC与底面BCD所成的角.

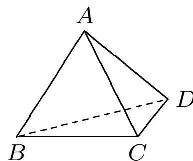


图 14

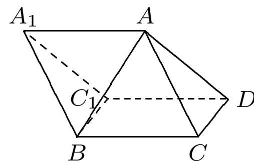


图 15

如果我们将此三棱锥置于一个更为广阔的三棱柱的背景之中, 如图15, 即可赋予其一定的实际意义, 将其改编为一应用性问题, 以用来培养学生的数学抽象与应用能力.

题6–2 一个人沿着与坡脚水平线成30°角的直道上山, 若测得此人行走了200米后升高了$50\sqrt{3}$米, 试求此山坡的倾斜度.

作为本文的结束, 笔者必须指出, 传统数学问题的改造其目的是为了更大地调动学生学习数学的兴趣, 为了提高学生分析问题、解决问题的能力. 因此, 哪些传统问题需要改造? 如何改造? 改造后如何应用于教学? 这些问题的回答都必须紧密结合具体的教学对象来综合考虑. 否则的话, 传统问题的改造将会适得其反地为原本负担沉重的学生带来新的负担.

参考文献

[1] 顾泠沅. 改造我们的学习. 数学通报. 2000.7.

[2] 薛党鹏. 传统数学问题的情景化改造. 数学教学. 2003.7.

数学和计算机信息科学知识教学整合的尝试

——《数学建模与算法实现》课程

200062 华东师范大学数学系 蒋鲁敏

今春上海市高中新开设了课程《数学建模与算法实现》, 尝试通过案例教学的形式, 把提高学生数学建模的能力和应用计算机的能力两方面目标结合起来, 组织拓展型的课程教学.

在数学教学中应该重视数学知识的应用, 是新课程标准的要求, 也已经成为广大数学教师的共识. 但是会解应用题并不等于会应用数学知识解决实际问题. 应该注意在解决实际问题的全过程中培养学生数学建模的能力, 其中包括应用题教学所没有的"前期准备"和"后期处理". 这里的"前期准备"指的是研究实际问题情景, 分析现象和探索规律, 并提出数学问题所必需的假设; "后期处理"指的是数学建模方法要求有数值的结果, 必须将数学模型的结果与实际对照, 经过实践的检验, 还包括必要时编写程序并利用计算机计算出结果. 在当今计算机广泛普及和计算机科学飞速发展的时代, 计算机的科学计算能力为学生应用数学知识解决实际问题提供了强有力的工具, 打开了广阔的天地. 但是在学校的教学中两者之间缺少有机的联系. 开设《数学建模与算法实现》对数学和计算机信息科学两方面知识的学习及整合作了有意义的探索.

现摘登《数学建模与算法实现》教材中两个简单的例子:

例1　十八世纪中叶, 天文学家已经发现的太阳系的行星及其位置从内到外排列如下表所示:

行 星	水星	金星	地球	火星	木星	土星
距离B	3.9	7.2	10.0	15.2	52.0	95.3

注: 其中B是行星到太阳的距离, 以地球到太阳距离的$\dfrac{1}{10}$作为单位1.

法国天文学家博德分析和观察上面的数据, 对照数学中有关的数学公式, 提出了太阳系行星和太阳距离的推算公式, 这个公式后来被人称为"博德规律". 现在的问题是: 我们是否也能根据上表的信息找出太阳系行星位置的分布规律?

【分析假设】 不过我们要提示一点, 在博德那个年代, 太阳系中还有许多行星尚未被发现. 而正是基于"存在尚未被发现的行星"的大胆假设, 博德才可能提出富有新意的"博德规律". 博德观察数据后相信: 行星到太阳的距离和该行星到太阳远近的序列数有关, 而这种关系可以用一个简单的数列表示.

这样, 我们可以把模型的假设归结为:

1. 在已经发现的行星之间或外边, 太阳系还存在尚未被发现的行星;

2. 把太阳系行星按到太阳的距离由近至远编号排序, 则行星到太阳的距离可以用一个简单的数列表示.

这也就是博德模型的基本假设.

我们把上表中的行星编号并列表如下:

行 星	水星	金星	地球	火星	木星	土星
编号n	1	2	3	4	5	6
距离B	3.9	7.2	10.0	15.2	52.0	95.3

为了便于思考, 我们画出行星编号n和距离B的关系图.

从图1可以看出, 前四颗行星的距离在一条"光滑"的曲线上, 而后面行星与前面行星的连线却有明显的波折, 不是这条光滑曲线的自然延伸. 于是我们进一步假设: 前四颗行星之间没有未被发现的行星.

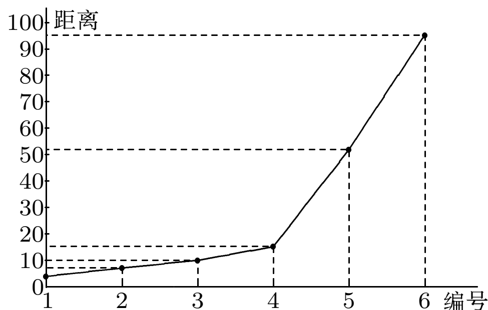


图 1

我们将试图找出前四颗行星离太阳的距离和它们序号的数量关系, 即找一个适当的数列, 使得数列中的项恰与表中的距离接近. 我们的问题变成:求 $\{B_n\}$, 满足 $B_1 \approx 4$, $B_2 \approx 7$, $B_3 \approx 10$, $B_4 \approx 15$, $B_l \approx 52$, $B_m \approx 95$, 其中 $l < m$, 它们都是待求的自然数, 分别为木星和土星的编号.

【模型求解】 因为这里要求的数列只是满足一些近似关系, 这样的数列有很大的不确定性. 我们可以用某些数列尝试求解. 历史上博德提出的公式是

$$B_n = 3 \times 2^{n-2} + 4,$$

这里, n 是行星按离太阳的距离从近到远的编号. 但是水星例外, 计算时上述公式右边的第一项取0. 对应的 $l = 6$, $m = 7$. 这是一个简单的太阳系行星位置的分布规律的数学模型.

【讨论验证】 博德公式的推算的结果和实际测量的结果如下:

行星	n	博德推算的距离	实际距离
水星	1	4 (例外)	3.9
金星	2	7	7.2
地球	3	10	10.0
火星	4	16	15.2
小行星*1801	5	28	27.6
木星	6	52	52.0
土星	7	100	95.3
天王星*1781	8	196	192
海王星*1846	9	388	301
冥王星*1930	10	772	396

表中带 $*$ 的行星是博德提出他的推算公式以后陆续被发现的, $*$ 后的数字是发现该行星的时间.

从表中可见, 博德公式推算的距离和当时已经发现的行星距离是很符合的. 后来在1781年, 天文学家威廉·赫歇尔发现了天王星, 它离太阳的距离是192, 符合博德公式. 此后天文学家曾因找不到博德公式中距离为28的行星而焦虑不安. 终于在1801年天文学家在火星和木星之间发现了第一颗小行星, 它离太阳的距离为27.6, 符合博德公式的推测. 此后天文学家又发现了大量的小行星, 它们的轨道基本介于火星和木星之间. 但是后来在1846年发现的海王星和1930年发现的冥王星, 实际距离和博德公式推算的距离有很大的差距. 这说明博德公式不适合离太阳较远的行星.

总之, 博德规律和当时已经知道的天文数据相当符合, 和后来发现的离太阳较近的行星的数据也很相符. 但是对离太阳较远的行星来说, 博德规律不再成立. 因此, 博德的数学模型在一定的范围内是正确的, 而历史上这个公式也确实帮助科学家发现了新行星, 应该说, 这是一个成功的数学模型的例子.

这个例子说明, 数学建模是一种创造性的思维活动, 需要有一定的数学知识, 但更需要敏锐的洞察力、想像力和不受陈规约束的创新精神.

例2 【问题提出】《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民月工资、薪金不超过800元的部分不必纳税, 超过800元的部分为全月应纳税额. 此项税额按下表累进计算.

全月应纳税额	税率
不超过500元部分	5%
超过500元不超过2000元部分	10%
超过2000元不超过5000元部分	15%
超过5000元不超过20000元部分	20%
超过20000元至40000元部分	25%
超过40000元至60000元部分	30%
超过60000元至80000元部分	35%
超过80000元至100000元部分	40%
超过100000元部分	45%

要求建立由工资、薪金总额计算应缴税款的数学模型并编写程序.

【分析假设】 以 x 表示一个人的工资、薪金总额, 以 y 记他的应缴税款. 按规定, 他的应纳税额为 $x - 800$. 由累进计算纳税款的方法可知, 一个人的应缴税款 y 是他应纳税额 $x -$

800的一个分段函数, 因而也可以表示为x的分段函数. 为此, 我们要分段推导函数的表达式.(略)

若以r记相应区间的纳税率, 分段函数各区间的纳税率和左端点的应纳税款数可列表如下:

编号	全月工资、薪金总额x(元)	应纳税款y(元)	以该点为下端点的区间纳税率r(%)
1	0	0	0
2	800	0	5
3	1300	25	10
4	2800	175	15
5	5800	625	20
6	20800	3625	25
7	40800	8625	30
8	60800	14625	35
9	80800	21625	40
10	100800	29625	45

【数学建模】 y可以表示为x的分段函数如下:

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant 800,\\ (x-800)\times 0.05, & 800<x\leqslant 1300,\\ 25+(x-1300)\times 0.10, & 1300<x\leqslant 2800,\\ 175+(x-2800)\times 0.15, & 2800<x\leqslant 5800,\\ 625+(x-5800)\times 0.20, & 5800<x\leqslant 20800,\\ 3625+(x-20800)\times 0.25, & 20800<x\leqslant 40800,\\ 8625+(x-40800)\times 0.30, & 40800<x\leqslant 60800,\\ 14625+(x-60800)\times 0.35, & 60800<x\leqslant 80800,\\ 21625+(x-80800)\times 0.40, & 80800<x\leqslant 100800,\\ 29625+(x-100800)\times 0.45, & 100800<x.\end{cases}$$

【算法实现】 以xx记工资、薪金总额, 以$x[i]$记上述分段函数定义域的第i个小区间左端点, 以$y[i]$记当工资、薪金总额$xx=x[i]$时的应纳税款, 以$r[i]$记该区间的纳税率, x、y、r已在上表中列出. 当工资、薪金总额xx在第i个小区间上时, 即当$x[i]<xx\leqslant x[i+1]$时, 纳税额yy可以统一用下列公式表示:

$yy=y[i]+r[i]\times(xx-x[i])$,

$r[i]=0.05\times i$.

由工资、薪金总额xx计算应缴税额yy的程序框图如图2:

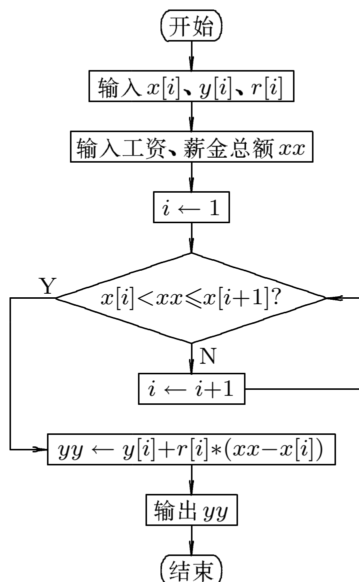


图 2

其中用yy记工资为x时的应缴税额. 在计算中为方便计, 可令$x[11]=10^{10}$, 为一个不可能达到的工资额. 计算时先确定xx在什么区间, 再按公式计算并输出应缴税款.

(程序略.)

(上接第8–31页)

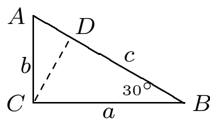


图 8

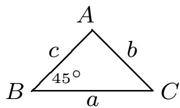


图 9

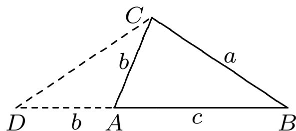


图 10

简解: 结论仍然成立, 证法很多, 本文提供一种: 见图10, 延长BA至D, 使$AD=AC$, 连结CD, 易证$DC=BC=a$, 由$\triangle BCD\backsim\triangle DAC$得$a^2-b^2=bc$.

总之, 随着素质教育的推进和基础教育课程改革的展开, 研究性数学问题将引领命题新潮流, 成为中考命题的热点和亮点, 中考命题将由考查知识型向考查方法型、潜能型转变, 朝着促进学生综合素质全面提高的方向持续发展.

数学游戏与数学课堂教学

312000 浙江省绍兴鲁迅中学 章显联

记得一代数学大师陈省身在北京举行的2002年国际数学家大会上曾为青少年数学爱好者题词，写的是“数学好玩”四个字，但作为教师，能否在课堂教学中加点“味精”，使教学内容尊重“儿童文化”，从而让学生主动地学数学，达到“数学好玩”的这种境界呢?

其实，数学游戏以其雅趣的形式“娱人”，以其丰富的内容“引人”，以其无穷的奥秘“迷人”，以其潜在的功能“育人”，古往今来，数学教育的理论与实践都已证明游戏对于数学学习有极大的价值. 正如布鲁纳所说:“游戏活动是生命的自由表现，它是生活乐趣”.

笔者结合理论学习和教学实践，尝试从以下几方面将游戏引入数学课堂教学，从而让数学更“好玩”.

一、在新概念教学中引入数学游戏

数学概念教学是数学教学的重要组成部分，因为数学概念是进行推理和判断的基础，清晰的概念是进行正确思维的前提. 但也是教学的难点. 因此，在新概念教学中引入教学游戏，不失是一种好方法.

例1　掷骰子引入无理数.

教师先做了个大骰子在课堂上问同学们这是什么，它有什么用? 当学生纷纷回答大骰子用于麻将时，教师却出其不意地告诉学生骰子还有一个新用处，而且与我们的数学有关—可以用来产生无理数. 然后请两位同学上台来，一位同学在讲台上掷骰子，另一位同学在“0”小数点后面写上骰子掷出的点数，随着骰子一次次地掷，点数一次次地记，黑板上出现了不断延伸的小数，$0.3154265123\cdots$，老师喊“暂停”，然后教师通过恰当的提问，从而引出无理数概念. 这样的教学设计，使学生接受“无理数”这一难懂的概念时，因为有了游戏作基础，而变得较为亲切.

二、在例习题教学中引入游戏

如果我们能潜心研究例题，不难将一些数学问题改造为有趣的游戏.

例2　已知$a>0$, $b>0$, 求证:$a^3+b^3\geqslant ab^2+a^2b$.

这是教材中的一道题目，在$a>0$, $b>0$的前提之下，a^3、b^3、a^2b、ab^2均可以看作长方体的体积，据此我们就可以将此问题改造为下述有趣的游戏，从而大大地增加了问题的探索性.

现有A、B、C、D四个长方体容器，A、B的底面积为a^2，高分别为a和b，且$a\neq b$，C、D的底面积为b^2，高分别为a和b. 现在规定一种游戏规则:每人一次从四个容器中取两个，以从容器中取出的溶液多者为胜，问先取者有没有必胜的方案? 若有的话，有几种?

一般化:当$a>0$, $b>0$时，$a^{p+q}+b^{p+q}\geqslant a^pb^q+a^qb^p$ (p、$q\in\mathbf{N}$).

例3　已知a、b、m都是正数，并且$a<b$，求证: $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$.

游戏引入:(1)猜谜语:考试不作弊(真分数)，

(2) ① 全班学生每人任意写下一个真分数;

② 分子、分母分别加上同一个正数;

③ 新分数与原分数的大小关系如何?

学生结论: 新分数大于原分数. 从而引出课本中一道例题 (即例3).

三、在重要定理、性质中引人游戏

在教学中适当引入游戏，对培养学生实践能力和创新精神具有不可低估的作用.

例4　二维均值不等式$\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$.

先设计以下引例:

(1)要在一个边长为15千米的正方形行政区内, 划出四块长与宽各为7千米与8千米的农田, 应如何划分? 注意到行政区的总面积为$15^2=225$平方千米, 而每块农田的面积是56平方千米, 因而还余下$225-4\times 56=1$平方千米.

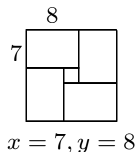
学生通过观察、动手实践, 很快会得到图(1)的结果.

(2)现在有一个更一般的问题: 设x、y为正数, 则四块大小为$x\times y$平方千米的矩形农田能否置入边长为$(x+y)$千米的一个正方形行政区内? 显然这一行政区的面积是$(x+y)^2$平方千米, 而每块农田的面积是xy平方千米, 所以, 除非不等式$4xy\leqslant(x+y)^2$成立, 否则我们是不可能解决此问题的, 反过来, 如果此问题有解, 则四块农田的总面积就不能超过行政区的总面积.

然后让学生在课堂上利用一些硬纸板分组动手实践、讨论交流.

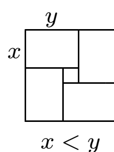
事实上这是一个二维"装箱"问题, 学生如能解决第一个问题, 即$x=7$, $y=8$的情形, 那么他就一定能解决一般问题. 接着, 引导学生分别根据x与y三种情况, 分别给出一般问题的解,如图(2)、(3)、(4)所示. 因此, 更一般的问题确实有解, 所以不等式$4xy\leqslant(x+y)^2$成立, 由此得算术——几何平均值不等式$\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$成立.

这样, 通过学生动手实践, 不仅让学生看到了二维均值不等式的现实(几何)意义, 而且得到了二维均值不等式的一种简易证明方法.



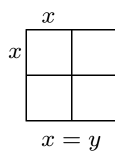
$x=7, y=8$

(1)



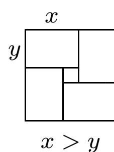
$x<y$

(2)



$x=y$

(3)



$x>y$

(4)

四、在引言、绪论教学中引入游戏

高一新生刚入学第一节课, 每块知识体系的第一节课, 我一般会安排一节绪论课.

例5　立体几何绪言课中, 我安排学生做下面的游戏, 每两个人发六根牙签, 问最多可排出多少个正三角形?

五、在数学竞赛辅导中引入游戏

教师在数学竞赛辅导时适当引进游戏, 让学生所谓"胡思乱想", 但又小心求证, 不失为一种好方法.

例6　在一次数学竞赛辅导中, 某老师表演了猜扑克牌的游戏, 他拿出一副牌(52张不含大小怪), 让在座的随便哪一位学生任意抽出五张, 交给他的助手, 助手将其中的四张牌一字排开, 依次亮在桌面上, 这老师看了桌上的四张牌, 他就猜出了他所没看到的那一张牌(花色和牌点).

如此猜了五、六回, 全部正确无误, 他的精彩表演博得了同学们的热烈掌声. 然后这位教师卖了一个关子说: 这是一种巧妙地运用了数学知识的扑克游戏, 你能知道其中的奥秘吗? 学生讨论后, 教师娓娓道来.

当然, 游戏的方法不能代替一切, 但能在正规严肃的教学方法外多为学生提供机会参加一些游戏(哪怕是偶尔一次), 让学生玩一下"快乐数学", 从而真正感受到"数学好玩", 不辜负陈省身老人家的殷切期望.

参考文献

1 张奠宙. 陈省声教授谈教学教育. 数学教学. 2005. 1.

2 宋国栋. 一种巧用数学知识的扑克游戏. 数学教学. 2002. 3.

3 章显联. 让学生在"数学交流中"学习. 数学教学. 2004. 5.

4 章显联. 一堂习题课的启示. 数学通报. 2003. 1.

5 张龙兴. 引入均值不等式的教学新探索. 中学数学教学参考. 2002. 5.

6 任勇. 任勇与中学数学学习指导. 国际文化出版公司. 2003. 8.

空间直角坐标系下探求点的坐标

276017 山东省临沂罗庄区第一中学 张传法 杨兆兰

高中新教材九(B)引入了空间向量坐标运算这一内容, 使得在解决立体几何平行、垂直、夹角、距离等问题时更加程序化, 只需代入公式进行代数运算即可. 这里常常需要首先建立空间直角坐标系, 求出所需点的坐标. 本文就如何探求点的坐标谈以下方法.

一、垂线法

空间直角坐标系中, 有些点的坐标可以通过向坐标平面或坐标轴作垂线, 从而再根据空间直角坐标系中坐标的定义写出其坐标.

例1 如图1, 在四棱锥P–$ABCD$中, 底面$ABCD$是一直角梯形, $\angle BAD=90°$, $AD/\!/BC$, $AB=BC=1$, $AD=2$, 且$PA\perp$底面$ABCD$, PD与底面成$30°$角, $AE\perp PD$, 垂足为E. 求证: $BE\perp PD$;

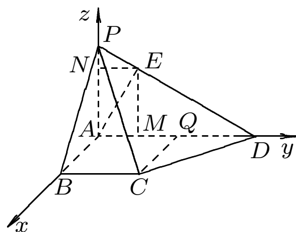


图 1

解析: 以A为坐标原点, 分别以AB、AD、AP所在直线为x、y、z轴建立空间直角坐标系.

$\because$ $PA\perp$底面$ABCD$, $\therefore$ $\angle PDA$为PD与底面所成的角, 即$\angle PDA=30°$, 过E作$EM\perp AD$于M, $EN\perp PA$于N, $\because$ $AD=2$, $\therefore$ $AE=1$, $\therefore$ $EM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $EN=\dfrac{1}{2}$, $\therefore$ $E\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 过$C$作$CQ\perp AD$于$Q$, 则$AQ=1$, $\therefore$ $C(1,1,0)$,

又$B(1,0,0)$、$P\left(0,0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$、$D(0,2,0)$,

$\therefore$ $\overrightarrow{BE}=\left(-1,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{PD}=\left(0,2,-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

$\because$ $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{PD}=-1\times0+\dfrac{1}{2}\times2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=0$, $\therefore$ $\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{PD}$, $\therefore$ $BE\perp PD$.

评注: 本题求点E的坐标时, 需作$EM\perp AD$, $EN\perp PA$, 并求出EM、EN的长, 即为点E的纵坐标、竖坐标; 求点C的坐标需作$CQ\perp AD$, CQ的长即为点C的横坐标.

二、公式法

空间直角坐标系中, 有些点的坐标用直接法和垂线法都无法求出, 但此点是它所在线段的定比分点、中点或所在平面的重心, 且它所在线段或平面的各点坐标可以用直接法或垂线法求得, 此时可用定比分点坐标公式、中点坐标公式、重心坐标公式求其坐标.

例2 如图2, 底面$ABCD$是边长为6的正方形, $\triangle EAD$是以$\angle E$为顶角的等腰直角三角形, 且面EAD垂直于底面, $EF\perp$面EAD, $EF=3$, R为BC中点. 若G、H为FB的三等分点, 建立适当的坐标系, 并求出G、H的坐标;

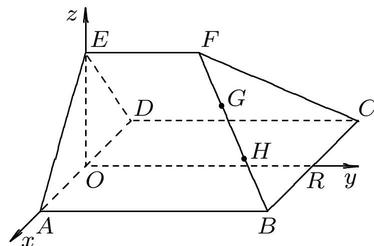


图 2

解析: 取AD的中点O, 连结EO、OR.

$\because$ $\triangle EAD$是等腰直角三角形,

$\therefore$ $EO\perp AD$, 又面$EAD\perp$面$ABCD$,

$\therefore$ $EO\perp$面$ABCD$,

又R为BC中点, 四边形$ABCD$是正方形, $\therefore$ $OR\perp AD$, $\therefore$ 以O为坐标原点, 分别以OA、OR、OE所在直线为x、y、z轴建立空间直角坐标系, 由题意, $F(0,3,3)$、$B(3,6,0)$,

$\therefore$ $\overrightarrow{FB}=(3,3,-3)$,

设$G(x_1,y_1,z_1)$、$H(x_2,y_2,z_2)$,

则由$\overrightarrow{FG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{FH}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{FB}$, 及定比分点坐标公式得:

$G(1,4,2)$、$H(2,5,1)$.

评注: 本题G、H为FB的三等分点, 而F、B点的坐标易知, 故可用定比分点坐标公式求得G、H点的坐标.

例3 (2003年高考题) 如图3, 在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中, 底面等腰直角三角形$\angle ACB=90^\circ$, 侧棱$AA_1=2$, D、E分别是CC_1与A_1B的中点, 点E在平面ABD上的射影是$\triangle ABD$的重心G.

(1) 求A_1B与平面ABD所成角的大小(结果用反三角函数表示);

(2) 求点A_1到平面AED的距离.

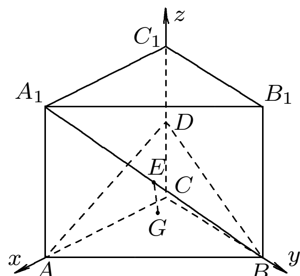


图 3

解析: 如图3, 以C为坐标原点, 建立空间直角坐标系$C-xyz$,

设$AC=a$, 由题意, $A(a,0,0)$、$B(0,a,0)$、$C(0,0,0)$、$A_1(a,0,2)$、$B_1(0,a,2)$、$C_1(0,0,2)$,

$\because$ D、E分别是CC_1与A_1B的中点, 由中点坐标公式得:

$D(0,0,1)$、$E\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},1\right)$,

$\because$ G是$\triangle ABD$的重心,

由重心坐标公式得: $G\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3},\dfrac{1}{3}\right)$,

$\therefore$ $\overrightarrow{EG}=\left(-\dfrac{a}{6},-\dfrac{a}{6},-\dfrac{2}{3}\right)$, 以下略.

评注: 本例中求D、E点坐标时用了中点坐标公式, 求$\triangle ABD$的重心G时用了重心坐标公式.

三、相等向量法

空间中, 两向量相等即两向量的横坐标、纵坐标、竖坐标分别相等, 利用这一关系, 可以求一些空间中点的坐标.

例4 三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$在某个直角坐标系下, 已知点$A(0,1,2)$、$A_1(2,-1,3)$、$B(1,2,-1)$, D是BB_1上一点, 且$BD=\dfrac{1}{2}DB_1$, 则D点坐标为________.

解析: 设$D(x,y,z)$, $\overrightarrow{BD}=(x-1,y-2,z+1)$, D在BB_1上且$BD=\dfrac{1}{2}DB_1$,

$\therefore$ $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}$, 又有三棱柱的性质知$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$,

$\therefore$ $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$, 即

$(x-1,y-2,z+1)=\dfrac{1}{3}(2,-2,1)$,

解得$x=\dfrac{5}{3}$, $y=\dfrac{4}{3}$, $z=-\dfrac{2}{3}$,

即$D\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

评注: 本题中求D点坐标, 利用了 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$这一结论.

例2中也可以利用$\overrightarrow{FG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{FH}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{FB}$, 直接求得$G(1,4,2)$、$H(2,5,1)$.

四、数量关系法

数量关系法求点的坐标, 即设出所要求的点的坐标, 利用题目中已知的数量关系, 列出一个方程组, 通过解方程组的方法, 求得点的坐标.

例5 矩形$ABCD$中, $AB=2$, $AD=1$, E是CD的中点, 沿AE把三角形ADE折起, 使D到D_1的位置, 且$D_1B=D_1C$. 证明: 面$AD_1E\perp$面ABC.

解析: 取AB中点为F, 连结EF, 过E作$Ez\perp$面$ABCE$, 以E为原点, 分别以EF、EC、Ez所在直线为x、y、z轴建立如图5所示的空间直角坐标系.

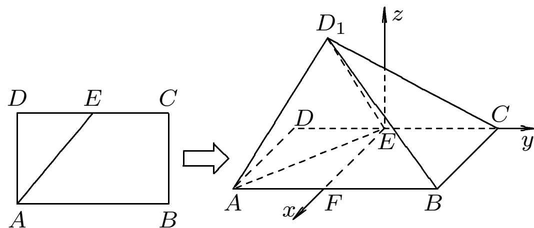


图 4　　图 6

要证明面$AD_1E\perp$面ABC, 只需证明面AD_1E的法向量与面ABC的法向量互相垂直, 面ABC的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$,

求面AD_1E的法向量需求出D_1点坐标, 设$D_1(x,y,z)$ $(z>0)$. 又$E(0,0,0)$、$C(0,1,0)$、$B(1,1,0)$、$A(1,-1,0)$.

由$|D_1B|=|D_1C|$,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$$
$$=\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2},$$

解得$x=\dfrac{1}{2}$,

由$|ED_1|=|AD_1|$,

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2},$$

解得$y=-\dfrac{1}{2}$,

由$ED_1\perp AD_1$, 得

$(x-1,y+1,z)\cdot(x,y,z)=0$,

解得$z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 即$D_1\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

评注: 本题利用$|D_1B|=|D_1C|$, $|D_1E|=|D_1A|$, $D_1E\perp D_1A$这三个数量关系求得$D_1\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

例6　如图6, 四边形$ABCD$为正方形, PD垂直于$ABCD$所在的平面, $AB=2$, E是PB的中点, $\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 建立适当的空间直角坐标系, 求出点E的坐标;

(2) 在平面PAD内求一点F, 使$EF\perp$面PCB.

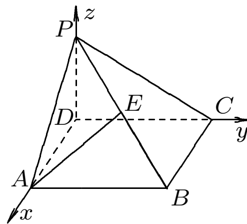


图 6

解析: (1) 建立空间直角坐标系$D-xyz$(如图6), 由题意知$A(2,0,0)$、$B(2,2,0)$、$C(0,2,0)$. 设$P(0,0,2m)$ $(m>0)$,

$\therefore$ $E(1,1,m)$, $\overrightarrow{AE}=(-1,1,m)$, $\overrightarrow{DP}=(0,0,2m)$.

$\because$ $\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ $\dfrac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{2m^2}{\sqrt{2+m^2}\times 2m}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

解得$m=1$, $\therefore$ $E(1,1,1)$.

(2) $\because$ F在平面PAD内, 可设$F(x,0,z)$

$\therefore$ $\overrightarrow{EF}=(x-1,-1,z-1)$, 由$EF\perp$面$PCB$, 得$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CB}=0$, $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{PC}=0$,

即$(x-1,-1,z-1)\cdot(2,0,0)=0$,

$(x-1,-1,z-1)\cdot(0,2,-2)=0$,

解得$x=1$, $z=0$, $\therefore$ $F(1,0,0)$, F为AD的中点.

评析: 本题在求E点坐标时, 利用了关系$\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 而在求$F$点坐标时, 用了关系$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{PC}=0.\end{cases}$

五、设而不求

有些题目中的有些点的坐标没法求出或没有必要求出, 我们可以暂设出这个点的坐标, 利用题目中的条件找出解决问题所需要的关系, 而无需求出点的坐标.

例7　如图7, 正四棱锥$S-ABCD$的侧棱长为$\sqrt{2}$, 底面边长为$\sqrt{3}$, E是SA的中点, O为底面$ABCD$的中心, 若$OG\perp SC$, 垂足为G, 求证: $OG\perp BE$.

解析: 以O为原点, 建立如图7所示的空间

一节探究型的向量习题课

200435 上海市久隆模范中学 孙 雁

笔者最近设计了一堂习题课, 貌似拓展课, 实质上是将学生在练习过程中比较有困难的题目进行有机组合, 经课堂尝试取得了良好的教学效果.

一、问题的提出

在华东师大版的上海高中数学教材中, "向量初步"一节内容安排在高二上学期. 然而, 学生在高一物理力学中已经应用到向量(也就是矢量), 所以作为数学教学内容的向量对学生来说基本上没有困难. 因此, 如何在该章节学习初期, 调动学生的学习兴趣、深化数学方法成为教学设计需要关注的问题.

本节是安排在向量概念、加法和减法、实数与向量的乘法、 定比分点的代数形式之后的一节习题课, 以引导学生发现和应用定比分点公式的向量形式(该内容不作要求)为主线, 上承向量的运算, 下接定比分点公式的代数形式, 综合应用所学的知识和方法来处理练习中遇到的疑难问题. 同时, 激发学生探究型学习的主动性, 培养发现、提出和解决问题的能力.

二、课堂实录

整节课在过程上分为观察、发现、应用和联系四部分. 所用的练习题目均选自或改编自上海市教育出版社《高中数学精练与博览》高二第一学期一书.

1. 观察现象

老师出示题目, 要求学生用不同的方法解决: 如图1所示, 在$\triangle ABC$中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$, D是边BC上的一点, 且$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$. 试用$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$表示$\overrightarrow{AD}$.

学生通过向量加法的平行四边形法则和三角形法则, 用不同的方法得到问题的答案: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$. 下面给出其中的一种解法.

〜〜

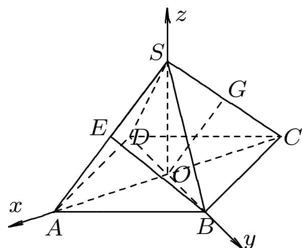


图 7

直角坐标系, 则$O(0,0,0)$、$A\left(\frac{\sqrt{6}}{2},0,0\right)$、$B\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$、$C\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},0,0\right)$、$S\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 由中点坐标公式知$E\left(\frac{\sqrt{6}}{4},0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, 因为$G$点在$xOz$平面上, 所以可设$G(x,0,z)$,

$\overrightarrow{OG}=(x,0,z)$,

$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$,

由$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{SC}=-\frac{\sqrt{6}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0$,

得$z=-\sqrt{3}x$,

所以$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}z=\frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}(-\sqrt{3}x)=0$, 故$OG\perp BE$.

评注: 本题求证$OG\perp BE$, 只需$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$, 求解的一般思路需求出$G$点坐标, 但本题只需设$G(x,0,z)$, 利用$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{SC}=0$, 求得$z=-\sqrt{3}x$, 这一关系直接代入即可, 设而不求.

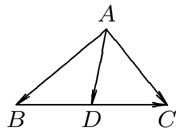


图 1

解: 在$\triangle ABD$中, 由$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$,

则$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$.

所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}$.

接下来, 老师修改条件$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$分别为$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{DC}$, 请学生解答.

学生根据第一个问题的解法较快得到结果, 分别为:

$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}}{3}$, $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}}{4}$,

$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}}{5}$.

老师将条件进一步修改为 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}\,(\lambda>0)$时, 这时候学生们通过观察可以迅速得到结果: $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}}{1+\lambda}$.

2. 发现规律

这时, 老师引导学生将观察出来的现象归纳为命题, 并且实施严格的证明. 整个引导围绕两个方面展开: 第一是形成命题的雏形, 第二是对相关的条件进行适当的完善.

(1) 形成命题

老师请同学们将观察出来的结果总结为命题并证明之.

学生的结论如下: 如图2所示, 在$\triangle ABC$中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$, D是边BC上的点, 且$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}$ $(\lambda>0)$, 则$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}}{1+\lambda}$.

证明: 在$\triangle ABC$中, $\because$ $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}\,(\lambda>0)$, $\therefore$ $\overrightarrow{BD}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}$.

又$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, 所以

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}}{\lambda+1}$.

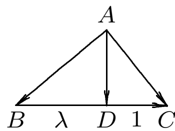


图 2

(2) 完善命题

此时, 有个别学生已经注意到命题条件需要讨论. 老师顺势进一步提问: 命题有哪些条件可以进一步完善? 学生答道: λ需要讨论. 还有学生说: 点A的位置可以移动.

老师说: 好, 我们首先看看λ的取值范围.

由于之前学习过定比分点公式的代数形式, 对$\lambda\neq-1$的讨论是比较顺利的. 学生分别讨论了$\lambda=0$、$\lambda<0$的情况, 分析出D为线段BC的外分点时$\lambda<0$; 当点D和点B重合时$\lambda=0$; 当$\lambda=-1$时, 要求点B和C重合, 这是不可能的. 综合上述情况, 得到λ的取值范围是$\lambda\in\mathbf{R}$且$\lambda\neq-1$.

接下来, 老师问: 对点A的选取是否有要求?

有学生提出: 点A与点B、点C不共线的情况成立. 如果三点不构成三角形, 命题成立与否值得探讨. 这时, 不需要老师的强调, 学生已经开始对三点共线情况下命题是否成立进行验证了. 结果发现: 点A与点B、点C是否共线, 对整个证明的过程没有丝毫的影响, 也就是说点A可以取平面内任意一点.

根据上述的讨论, 定比分点公式的命题完整地描述为: 平面内不同的三点A、B、C, 若点D在线段BC上, 且有$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}\,(\lambda\neq-1)$, 则有$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$.

老师在学生总结的基础上补充道: 当$\lambda=1$时所得的结论较为常用, 即$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$, 或者是$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.

3. 巩固应用

练习1 如图3所示, 已知$\overrightarrow{AP}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, 试用$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OP}$.

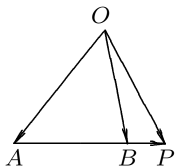


图 3

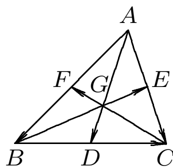


图 4

练习2 如图4所示, $\triangle ABC$中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$, D、E、F分别是边BC、AC、AB的中点, 求证:$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$.

练习3 如图5所示, 任意四边形$ABCD$, M、N分别是AD、BC的中点, G为MN的中点, O为平面内的任一点, 求证:

(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$;

(2) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

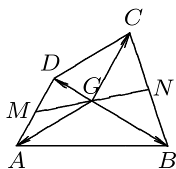


图 5

对于练习1, 学生能够迅速找到关系式$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BP}$, 然后运用定比分点公式的向量形式或者直接运用三角形法则运算即可得到结果.

练习2的解决非常迅速, 由

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$, $\overrightarrow{BE}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}$,

$\overrightarrow{CF}=\dfrac{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}}{2}$,

三式整理后可以马上得到结果.

练习3(1)中面对四个向量相加, 学生一开始有点畏难情绪, 但是在老师引导下, 寻找到了应用公式的条件, 分解四个向量相加为$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GM}$、$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GN}$, 而$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{0}$, 问题迎刃而解.

顺理成章, 学生能够用类似的方法较快解决练习3(2)的证明. 有部分学生没有使用定比分点公式的向量形式, 而是用三角形法则和(1)小题的结论, 过程也很简洁(如图6所示).

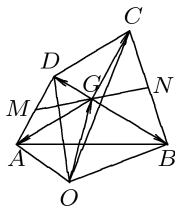


图 6

证明: 由题设知

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}$,

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}$,

又由(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$,

所以得$4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$,

即$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

4. 新旧联系

发现和应用定比分点公式向量形式后, 学生已经观察出: 这个公式与已经学习过的代数形式有相似之处. 于是, 老师抓住这个契机提问: 两种形式之间是否存在内在联系?

学生沉默了一会儿, 然后老师提出: 能否用定比分点公式的向量形式证明其代数形式, 即已知点$B(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$, 且存在点D使$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}$ $(\lambda\neq-1)$, 求点D的坐标.

同学们对这个问题的兴趣很浓, 积极地观察并寻找应用公式的条件, 也就是寻找适当的点A. 通过一番讨论, 不少学生发现, 用坐标原点替换公式中的点A的作用是最合适的.

证明: 如图7, 连结OB、OC、OD, 设点$D(x,y)$, 则$\overrightarrow{OD}=\{x,y\}$.

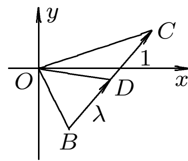


图 7

$\because$ $B(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$,

$\therefore$ $\overrightarrow{OB}=\{x_1,y_1\}$, $\overrightarrow{OC}=\{x_2,y_2\}$.

由$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}$, 可得$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}}{1+\lambda}$, 即

$$\overrightarrow{OD}=\{x,y\}=\frac{\{x_1,y_1\}+\lambda\{x_2,y_2\}}{1+\lambda}$$

一道课本轨迹例题的研究性学习

510700 广东省广州市第八十六中学 权宽一

学生答题错误是一种可以使用的教学资源，它有着正面教学所不可取代的作用．在教学中若能"惯性"利用好错误，既可以使课堂具有"诗情画意"，又可以产生意想不到的教学效果．下面是作者在教学时，"将错就错"的一节研讨课．

一、出错者无心、旁观者在意

在章节复习课时，我让学生自己完成这样一道题目：一动圆与圆$x^2+y^2+6x+5=0$外切，同时与圆$x^2+y^2-6x-91=0$内切，求动圆圆心的轨迹方程，并说明它是什么样的曲线[全日制普通高级中学教科书(必修)《数学》第二册(上)(人教版) P.129例1]．几分钟后大多数做完的同学的答案是(见图1)：动圆圆心的轨迹方程是$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$，它是"以两定圆的圆心为焦点，以大定圆半径与小定圆半径的和(12)为定长的椭圆"；但是有一个同学的答案是：动圆圆心的轨迹方程是$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$，它是"以两定圆的圆心为焦点，以大定圆半径与小定圆半径的差(8)为定长的椭圆"．经过大家共同查找，发现出错的原因是他把题目理解为：一动圆与圆$x^2+y^2+6x+5=0$内切，同时与圆$x^2+y^2-6x-91=0$内切，求动圆圆心的轨迹方程，自然也就得到了不同的答案．

按理说问题算解决了，出错者无心之举也可以理解，但是，一个答案正确的同学却冒出了一句"很好玩，还有没有其他的相切情况?"，这句话把大家给逗乐了，但笑声之后课堂上却异常平静．我也顺势而为地说："那你们就试一试吧"．试了一会儿后一个同学断言："上题是动圆与大定圆内切且与小定圆外切、动圆与大定圆内切且与小定圆内切(小定圆在动圆里面)两种情况，由于不存在与两定圆外切的动圆、不存在与大定圆外切且与小定圆内切的动圆，更不存在与大定圆内切且与小定圆内切(动圆在小定圆里面)的情况，所以没有其他情况．" 大家也点头同意他的观点．

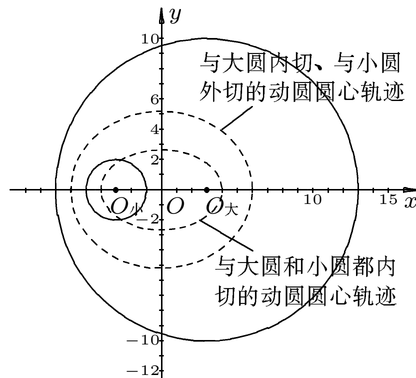


图 1

二、猜想者无忌、验证者惊奇

可是，班上一位数学学习较好的同学却举手说："我观察到上面两个定圆是没有交点的内含关系，得到与两个定圆都相切的动圆圆心的轨迹是：以两定圆的圆心为焦点，以大定圆半径与小定圆半径的和或差为定长的两个椭圆．但从数学对称美的角度来看，我猜想：如果两个定圆是没有交点的外离关系，得到与两个定圆都相切的动圆圆心的轨迹应该是：以两定圆的圆心为焦点，以大定圆半径与小定圆半径的和

$$=\left\{\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right\},$$

故点D的坐标为$\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

问题讨论到这里，基本的方法和结论已经出来了．尽管下课铃响了，但同学们还意犹未尽，希望用所学的内容去解决更多的问题．

或差为定长的两个双曲线. 但不知道是否是这样?” 他的大胆发言使大家惊奇. 一会儿有人汇报画图检验正确, 一会儿又有人汇报特例验证正确, 又过一会儿有几个小组汇报用定义证明成立. 我请一个小组派代表上黑板汇报用定义证明过程.

他们的解法是: 当两定圆外离, 设大定圆、小定圆及动圆的圆心分别为$O_{大}$、$O_{小}$、$M_{动}$, 大定圆、小定圆及动圆的半径分别为$R_{大}$、$R_{小}$、$R_{动}$,

(1) 当动圆与大定圆外切且与小定圆内切时有: $R_{动}+R_{大}=|M_{动}O_{大}|$, $R_{动}-R_{小}=|M_{动}O_{小}|$, 则$|M_{动}O_{大}|-|M_{动}O_{小}|=R_{大}+R_{小}$ (常数); 当动圆与大定圆内切且与小定圆外切时有: $R_{动}-R_{大}=|M_{动}O_{大}|$, $R_{动}+R_{小}=|M_{动}O_{小}|$, 则$|M_{动}O_{大}|-|M_{动}O_{小}|=-(R_{大}+R_{小})$ (常数). 所以, 当动圆与一定圆外切且与另一个定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆圆心为焦点, 以大定圆半径与小定圆半径的和为定长的一个双曲线(见图2).

(2) 当动圆与两个定圆都外切时有: $R_{动}+R_{大}=|M_{动}O_{大}|$, $R_{动}+R_{小}=|M_{动}O_{小}|$ (见图2), 则$|M_{动}O_{大}|-|M_{动}O_{小}|=R_{大}-R_{小}$ (常数); 当动圆与两个定圆都内切时有: $R_{动}-R_{大}=|M_{动}O_{大}|$, $R_{动}-R_{小}=|M_{动}O_{小}|$, 则$|M_{动}O_{大}|-|M_{动}O_{小}|=-(R_{大}-R_{小})$ (常数). 所以, 当动圆与两个定圆都外切或内切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为焦点, 以大定圆半径与小定圆半径的差为定长的一个双曲线.

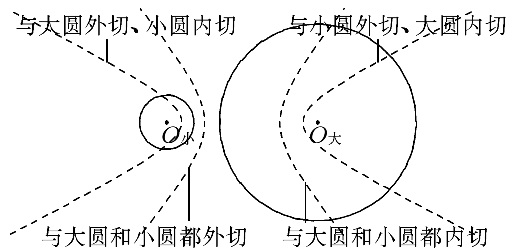


图 2

此时我赞扬了利用数学对称的美去猜想结论的同学, 也表扬了为检验、验证、证明猜想结论而共同努力的全体同学.

三、辩证者类比、探索者统一

我的话还没有讲完, 平时很少发言的一位女生站起来却说:“老师, 刚才只讨论两个定圆没有交点情况, 对两个定圆相交和相切的情况还没有讨论”. 我说:“是的, 我们对两个定圆相交和相切的情况还没有讨论, 那大家也先猜想一下”. 结果同学们猜想到以下结论:

(1) 当两个定圆相交时, 动圆圆心的轨迹应该是一个椭圆、一个双曲线.

(2) 当两个定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该是一个椭圆; 当两个定圆外切时, 动圆圆心的轨迹应该是一个双曲线.

为了节省时间我把学生分成三小组, 每个小组讨论并证明一种情况, 一会儿各小组派代表上黑板汇报结果.

A 小组: 当两个定圆相交时(见图3),

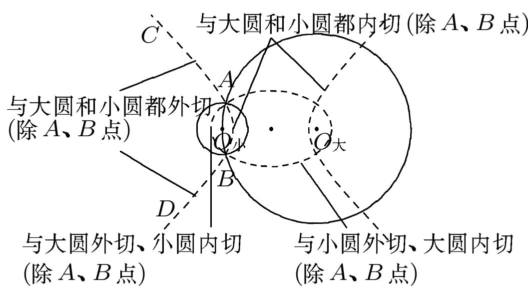


图 3

(1) 当动圆与一个定圆外切且与另一个定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为焦点, 以大定圆半径与小定圆半径的和为定长的一个椭圆 (不含交点A、B);

(2) 当动圆与两定圆外切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为焦点, 以大定圆半径与小定圆半径的差为定长的一个双曲线一支的一部分AC、BD (不含A、B点);

(3) 当动圆与两定圆内切时(动圆在两定圆相交部分的里面), 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为焦点, 以大定圆半径与小定圆半径的差为定长的一个双曲线一支的一部分AB (不含交点A、B);

(4) 当动圆与两定圆内切时(两定圆含在动圆里面), 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为焦点, 以大定圆半径与小定圆半径的差为定长的一个双曲线的另一支(右支).

B小组: 当两个定圆内切时(见图4),

(1) 当动圆与小定圆外切且与大定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为焦点, 以大定圆半径与小定圆半径的和为定长的一个椭圆(不含切点A);

(2) 当动圆与两定圆外切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以切点为端点, 以圆心到切点方向为方向的一条射线AE(不含切点A);

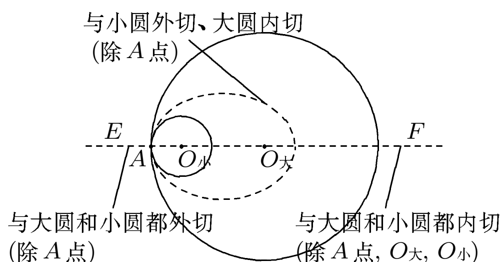


图 4

(3) 当动圆与两定圆内切时, (动圆在两定圆的里面), 动圆圆心的轨迹应该是: 以小定圆圆心和切点为端点的线段$AO_{小}$(不含切点A和小定圆圆心$O_{小}$);

(4) 当动圆与小定圆外切与大定圆内切时(动圆在小定圆的外面且在大定圆的里面), 动圆圆心的轨迹应该是: 以小定圆圆心和大定圆圆心为端点的线段$O_{小}O_{大}$(不含两定圆圆心$O_{小}$、$O_{大}$);

(5) 当动圆与两定圆内切时(两定圆含在动圆里面), 动圆圆心的轨迹应该是: 以大定圆的圆心为端点, 以小定圆圆心到大定圆圆心的方向为方向的一条射线$O_{大}F$(不含$O_{大}$).

C小组: 当两个定圆外切时(见图5).

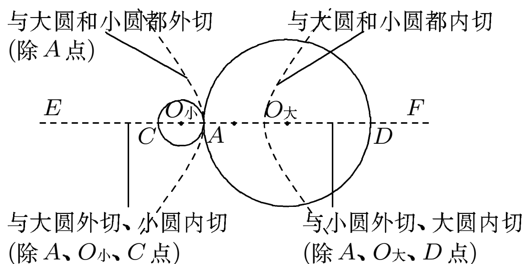


图 5

(1) 当动圆与两定圆外切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为焦点, 以大定圆半径与小定圆半径的差为定长的一个双曲线一支(左支, 不含切点A);

(2) 当动圆与两定圆内切时(两定圆含在动圆里面), 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为焦点, 以大定圆半径与小定圆半径的差为定长的一个双曲线的一支(右支);

(3) 当动圆与一个定圆外切且与另一定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 过两定圆圆心的直线$O_{小}$ $O_{大}$(不含两定圆的圆心$O_{小}$、$O_{大}$和切点A).

上述的结论说明: 两个定圆相交时, 猜想的结论正确; 当两个定圆内切时, 猜想的结论基本正确, 但变质的部分(线段和射线)没有猜出来.

四、严谨者质疑、补充者完美

从两个定圆的位置关系来说, 问题应该算解决完了. 但又有两位同学提出问题: (1) 两圆的半径相等时, 上述的各种情况动圆圆心的轨迹会有变化; (2) 当两定圆为同心圆时, 动圆圆心的轨迹也会发生变化. 就这两点大家又给予补充:

(一) 两圆的半径相等时.

1. 两定圆相交时(见图6).

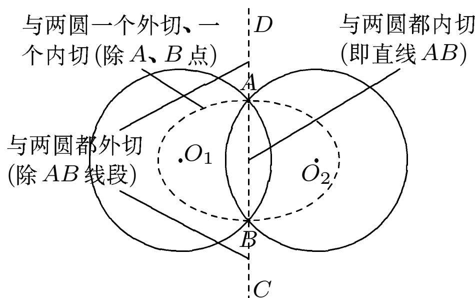


图 6

(1) 当动圆与一个定圆外切且与另一个定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为焦点, 以定圆直径为定长的一个椭圆(不含交点A、B);

(2) 当动圆与两定圆外切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的交点为端点的射线AD、BC(不含交点A、B);

(3) 当动圆与两定圆内切时, 动圆圆心的轨

关于传球问题的研究性学习

276700 山东省临沭一中 李锦旭 英荣国 276700 山东省临沭二中 岳 超

一、问题背景

山东临沂市2005年1月份高三模拟考试卷中有一道关于传球问题的试题:

三人相互传球, 由甲开始发球, 并作为第一次传球, 经过5次传球后, 球仍回到甲手中, 则不同的传球方法的种数是⋯⋯⋯⋯⋯⋯( )

(A) 6; (B) 8; (C) 10; (D) 16.

本题主要考查排列组合中的计数问题, 当时我校学生的得分情况并不理想, 笔者所任教班级为实验班(学生的成绩普遍较好), 但是选择正确答案(C)的仅为30%, 其余选项基本平均. 进一步调查发现, 大多数同学没有明确的解题思路, 有的根本就不理解题意; 有的只会使用列举法进行直观列举, 但不能按一定顺序

迹应该是: 以两定圆的交点为端点的直线AB(不含交点A、B).

2. 两定圆外切时(见图7).

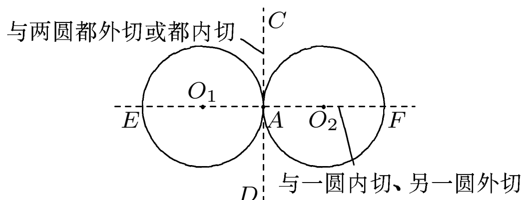


图 7

(1) 当动圆与一个定圆外切且与另一个定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 过两定圆的圆心的直线O_1O_2(不含切点A和两定圆的圆心O_1、O_2点);

(2) 当动圆与两定圆外切及动圆与两定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该都是: 过切点垂直于两定圆圆心连线的直线CD(不含切点A).

3. 两定圆外离时(见图8).

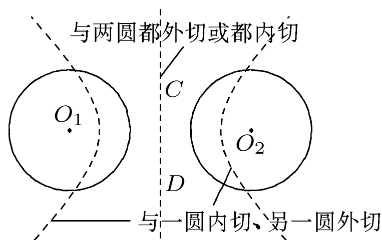


图 8

(1) 当动圆与一定圆外切且与另一个定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为焦点, 以定圆直径为定长的一个双曲线;

(2) 当动圆与两定圆外切及动圆与两定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该都是: 两定圆圆心连线的垂直平分线CD.

(二) 两圆为同心圆时(见图9).

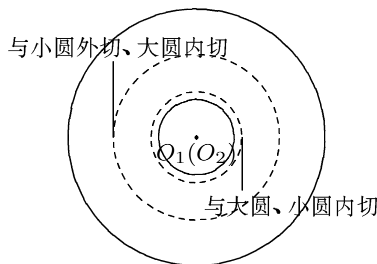


图 9

(1) 当动圆与小定圆外切且与大定圆内切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为圆心, 以大定圆半径与小定圆半径的和为直径的圆;

(2) 当动圆与两定圆都内切时, 动圆圆心的轨迹应该是: 以两定圆的圆心为圆心, 以大定圆半径与小定圆半径的差为直径的圆.

问题总算圆满解决, 同学们和我一起陶醉在这和谐、辩证、统一的数学美之中. 我说:"感谢错误, 也感谢同学们大胆的发现、猜想、类比、质疑, 更感谢同学们自己解决了自己提出的问题. 今天你们是好样的, 明天你们会创造未来."

将所有情况一一穷尽, 有遗漏现象; 选(C)的同学中也有是蒙对的, 其实并不真正理解题意; 绝大多数同学缺少转化问题的意识, 不能通过联想已经解决的熟悉问题来建立数学模型求解, 表现出抽象思维的贫乏与薄弱. 事实上, 对这种似乎是非常规性的问题, 往往难以用常规题型的通常解法去顺利解答; 我感觉这是一道极具思维训练价值的好题, 值得深入研究, 于是组织学生进行研究性学习.

二、分组讨论 多向求解

师(简要介绍做题情况与试题特点后): 这真是一道难题吗? 同学们能用所学过的相关知识与方法来求解吗?

留给学生充分独立思考、探索和自由交流讨论的时空. 将学生讨论的结果归类如下:

1. *将传球路线一一列举, 进行直观求解:*

生1: 考虑传球次数不多, 可用枚举法画出详细树状图(图1), 甲先传球给乙(上面的一条道路)到最后回到甲手中, 共有五种传球方法; 同理甲先传球给丙, 由对称性可知也有五种传球方法; 故共有10种传球方法.

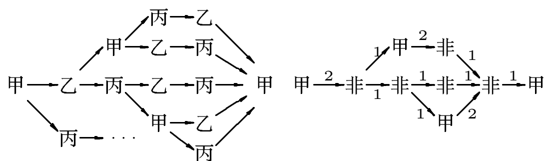


图 1　　　　图 2

生2: 由于球开始和结束都在甲手中, 因此球第一次传出后及最后一次传出前必须不在甲手中, 不妨把乙、丙统称为"非"(意为非甲), 故只要确定中间几次传球的情况即可. 传球线路如图2, 图中"→"表示传球方向, "→"之上所附数字表示对应于此步的传球方法数.

所以, 本题传球不同方法数是$2\times1\times2\times1\times1+2\times1\times1\times1\times1+2\times1\times1\times2\times1=10$.

2. *与已有知识结构联系, 建模求解:*

生3: 联想到2003年新课程卷文科高考试题第16题: 将3种作物种植在并排的5块试验田里, 每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物, 不同的种植方法共有______种.

可以将本题进行等价转化为涂色模型: 相当于给图3六个方格涂红、黄、蓝三种颜色, 要求第1、6两格涂红色, 每个方格涂一种颜色, 并且相邻的两个方格涂不同的颜色的方法种数. 分类讨论如下:

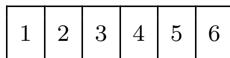


图 3

针对红色还可涂在$\boxed{3}$或$\boxed{4}$当中, 分三种情况:

(1) 若$\boxed{3}$涂红色, 则$\boxed{4}$、$\boxed{5}$只能涂黄、蓝两色, 有A_2^2种方法, 而$\boxed{2}$只能选择黄、蓝两色之一, 有A_2^1种方法, 由乘法原理知有$A_2^2A_2^1=4$种方法; (2) 若$\boxed{4}$涂红色, 同理有4种方法; (3) $\boxed{3}$、$\boxed{4}$都不涂红色, 则只能在$\boxed{2}$、$\boxed{4}$选涂一种颜色, 在$\boxed{3}$、$\boxed{5}$涂另一种颜色, 有A_2^2种方法; 综上, 共有$2A_2^2A_2^1+A_2^2=2\times4+2=10$种方法.

生4: 改变问题的叙述形式, 就成为很熟悉的排数模型:

用1、2、3三个数字排成6位整数, 要求首位和末位排1, 且任意相邻的两数码不相同, 可以得到多少个不同的6位整数?

解略.

三、进一步探究

师: 上述4位同学的4种解法具有一定的代表性, 如何将问题及其解答向一般情况推广, 来进一步揭示问题的规律, 认识问题的本质呢?

生5: 将此问题向一般情况引申, 有

推广1　甲乙丙三个人相互传球, 由甲开始发球, 并作为第一次传球, 经过n次传球后, 球又回到甲手中, 则不同的传球方法有多少种?

问题一经引向一般, 上述4种具体解法就难以完全套用! 但是可以受其方法的启发——引导学生发现问题背后的规律.

生6: 设经过n次传球后, 球在甲手中的不同方法有a_n种, 球不在甲手中的不同方法有b_n种, 则有: ① $a_1=0$, 经过n次传球后共有2^n种不同的传球方法;

② 经过n次传球后要么在甲手中, 要么不在, 可得$2^n = a_n + b_n$;

③ 第$n-1$次传球后,球在甲手中, 则下一次必不在甲手中(甲传出去有两种可能); 第$n-1$传球后, 球不在甲手中, 则下一次可以传到甲手中(乙可以传给甲或丙, 丙可以传给甲或乙, 各有两种可能);

④ 经过n次传球后, 球在甲手中有a_n种方法, 等于第$n-1$次传球后球不在甲手中的方法数b_{n-1}, 即$a_n = b_{n-1}$, 且$a_{n-1} + b_{n-1} = 2^{n-1}$. 所以$a_n = 2^{n-1} - a_{n-1}$. (i)

这是此数列的递推关系式, 结合$a_1 = 0$可得$a_n - \frac{2^n}{3} = -\left(a_{n-1} - \frac{2^{n-1}}{3}\right)$, 于是数列$\left\{a_n - \frac{2^n}{3}\right\}$是首项为 $-\frac{2}{3}$, 公比为-1的等比数列, 即$a_n - \frac{2^n}{3} = -\frac{2}{3} \times (-1)^{n-1}$, 解得$a_n = \frac{2^n + (-1)^n \cdot 2}{3}$.

评注: ① 对(i)式学生给出多种转化方式, 如 (a)变形为 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}$, 即$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{3}\right)$, 则$\left\{\frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{3}\right\}$是以 $-\frac{1}{2}$为公比, 以$\frac{a_1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$为首项的等比数列.

(b) 由(i)式可得$a_{n+1} = 2^n - a_n$, 两式相减得$a_{n+1} - a_{n-1} = 2^{n-1}$. 再分奇偶项求解后合成即可.

原题的解即为$a_5 = 10$. 当然, 也可推知球不在甲手中有$2^5 - 10 = 22$种方法; 根据等可能性, 传到乙、丙手中各有11种情况.

② 近阅文[1]正好是上述推广1, 所给解法即上述(a).

生7: 改进生3的涂色模型, 把图3中$\boxed{1}\boxed{6}$粘起来, 并作推广, 如图4.

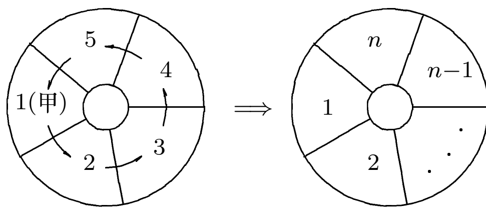


图 4

传球从甲开始, 相当于区域1只涂固定颜色(如红色), 现假设可任意涂色, 则区域1可有3种涂法, 其它区域都各有2种涂法, 但区域n与区域1有两种情况: 同色与异色. 同色相当于合并, 为$3a_{n-1}$, 异色正好为$3a_n$.

故$3a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 3a_{n-1}$, 即$a_n + a_{n-1} = 2^{n-1}$ (下略).

评注: 生6、7的解法均较为简捷, 建模意识强, 确有创意!

生8: 将此问题再推广, 可有

推广2　甲乙丙丁四个人相互传球, 由甲开始发球, 并作为第一次传球, 经过n次传球后, 球又回到甲手中, 则不同的传球方法有多少种?

生9: 直观列举, 归纳概括找规律:

列出传球的树状图如图1, 观察此图易得如下结论:

	甲	乙	丙	丁
一次	0	1	1	1
二次	3	2	2	2
三次	6	7	7	7
四次	21	20	20	20
五次	60	61	61	61
···	···	···	···	···

观察上表, 可总结概括传球规律:下一次某人的种数为他前边另几人传球种数之和. 于是对于甲来说, 其传接球规律为

	经n次传球后回到甲手中的方法数a_n
一次	$3^1 - (0+1) - (0+1) - (0+1)$
二次	$3^2 - (3-1) - (3-1) - (3-1)$
三次	$3^3 - (6+1) - (6+1) - (6+1)$
四次	$3^4 - (21-1) - (21-1) - (21-1)$
五次	$3^5 - (60+1) - (60+1) - (60+1)$
···	············

综上可得结论:当n为偶数时, $a_n = 3^n - (a_n-1) - (a_n-1) - (a_n-1)$, 即$a_n = \frac{3^n+3}{4}$;

当n为奇数时, $a_n = 3^n - (a_n+1) - (a_n+1) - (a_n+1)$, 即$a_n = \frac{3^n-3}{4}$.

于是有$a_n = \frac{3^n + (-1)^n \cdot 3}{4}$.

评注:这位学生虽未给出严格证明,但能够进行如上的直观列举, 并借此较容易地发现问题背后的规律, 实已属难得!

生10: 由传球规律可知, 要使第n次传球回到甲手中, 则第$n-1$次传球后球必不在甲手中, 易得$a_n=3^{n-1}-a_{n-1}\,(n\geqslant 2)$. 于是, 进行迭代求解, 有

$a_n=3^{n-1}-a_{n-1}=3^{n-1}-3^{n-2}+a_{n-2}=\cdots$,

当n为偶数时, $a_n=3^{n-1}-3^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-3}\cdot 3^2+a_2=\dfrac{3^n+3}{4}$;

当n为奇数时, $a_n=3^{n-1}-3^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-3}\cdot 3^2-a_2=\dfrac{3^n-3}{4}$.

综上, 有$a_n=\dfrac{3^n+(-1)^n\cdot 3}{4}$.

生11 (归纳—猜想—证明):3次传球后, 若球传回甲手中, 则第1、2次接球的是乙丙丁三人中的两人, 且有次序, 故$a_3=A_3^2=6=\dfrac{3^3-3}{4}$; 经4次传球后, 若球传回甲手中, 则有以下两种情况: 第2次没有传给甲: $3\times 2\times 2=12$, 第2次传给甲: $3\times 1\times 3=9$, 故$a_4=12+9=21=\dfrac{3^4+3}{4}$, ……, 猜想: $a_n=\dfrac{3^n+(-1)^n\cdot 3}{4}$.

证明: 用数学归纳法.

(1) 当$n=2$时, 由$a_2=3$知结论成立;

(2) 假设当$n=k$时命题成立, 即$a_k=\dfrac{3^k+(-1)^k\cdot 3}{4}$. 则当$n=k+1$时, 传第$k+1$次回到甲的手中, 不管第$k$次是否传到甲的手中, 共有$3^k$种方法. 而第$k$次传到甲的手中的方法恰好为$a_k$, 于是

$a_{k+1}=3^k-a_k=3^k-\dfrac{3^k+(-1)^k\cdot 3}{4}=\dfrac{3^{k+1}+(-1)^{k+1}\cdot 3}{4}$.

即猜想对$n=k+1$也成立.

由(1)、(2)两步可知, 猜想对任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立.

生12: 将此问题一般化, 有

推广3　$m(m\geqslant 3)$人相互传球, 由甲开始发球, 并作为第一次传球, 经过n次传球后, 球仍回到甲手中, 则不同的传球方法的种数是多少?

简析: 由上述"研究"过程作基础, 不难得到$a_n=\dfrac{(m-1)^n+(-1)^n\cdot(m-1)}{m}$, $n\in\mathbf{N}^*$. 并且出现了建立递推关系式$a_{n+1}+a_n=(m-1)^n\,(a_1=0)$后, 用多种方法求$a_n$、概率模型法等多种证法; 这里摘取并不"简捷"却有趣味的几种解法.

生13: 甲传给非甲的情况共有$m-1$种, 非传给非有$m-2$种, 非传给甲只有1种, 即

$$甲\xrightarrow{m-1}\underbrace{非\xrightarrow{m-2}非\rightarrow\cdots\rightarrow非\xrightarrow{m-2}非}_{n-2次}\xrightarrow{1}甲.$$

按照在这n次传球过程中甲总共触球的次数进行分类, 可有以下情况:

(1) 甲共触球2次即只有第一次传出和最后一次接球(中间不接传), 这时非与非共传球$n-2$次, 可得传球次数为

$N_2=(m-1)(m-2)^{n-2}$;

(2) 甲共触球3次, 即除首末两次外, 中间多了一次触球机会, 这相当于甲去替换其中一个"非", 当然, 两头的"非"除外, 而中间非与非之间共进行$n-2$次相互传球, 所以可以看成有$n-1$个"非"在中间位置, 故甲可以替换的"非"有$(n-1)-2=n-3$个, 即这时情况总数为

$N_3=C_{n-3}^1(m-1)^2(m-2)^{n-4}$;

(3) 甲共触球4次, 当传球$n(n\geqslant 6)$次时, 从$n-3$个位置中选2个甲, 但得排除甲两两相邻的情况$n-4$种, 故这时的情况数为$C_{n-3}^2-(n-4)=C_{n-4}^2$. 于是总数为

$N_4=C_{n-4}^2(m-1)^3(m-2)^{n-6}$.

……

(4) 甲共触球i次(i为甲最多触球次数).

① 当n为奇数时, 甲最多触球$i=\dfrac{n+1}{2}$次, 这时总数为$N_i=\dfrac{n-1}{2}(m-1)^{\frac{n-1}{2}}(m-2)$;

② 当n为偶数时, 甲最多触球$\dfrac{n+2}{2}$次, 这时总数为$N_i=(m-1)^{\frac{n}{2}}$.

于是, 传球的总方法数为

$a_n=N_2+\cdots+N_i=(m-1)(m-2)^{n-2}+C_{n-3}^1(m-1)^2(m-2)^{n-4}+C_{n-4}^2(m-$

$1)^3(m-2)^{n-6}+C_{n-5}^3(m-1)^4(m-2)^{n-8}+\cdots+\begin{cases}\dfrac{n-1}{2}(m-1)^{\frac{n-1}{2}}(m-2), & n\text{为奇数},\\ (m-1)^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$

这里上式的通项为$N_{k+2}=C_{n-(k+2)}^k(m-1)^{k+1}(m-2)^{n-2(k+1)}$, $k=0, 1, 2, \cdots, i-2$ $\left(n\text{为奇数时}, i=\dfrac{n+1}{2}; n\text{为偶数时}, i=\dfrac{n+2}{2}\right)$.

可以证明,

$$a_n=\frac{(m-1)^n+(-1)^n\cdot(m-1)}{m},$$

$n\in\mathbf{N}^*$ (略).

评注: 生13的解法确实不够简捷, 但却提供了另一类解决此问题的思路, 构建的数列$\{N_k\}$也有一定的实用价值.

生14: 借鉴生7的方法, 建立涂色模型如图4. m个人$\xrightarrow{\text{对应于}}m$种不同颜色, 传$n$次球$\xrightarrow{\text{对应于}}$在$n$个彼此相连的区域1, 2, 3, $\cdots$, n内涂色, 且任何相邻的2个区域涂不同色. 则可将推广3改述为

推广$3'$　用$m(m\geqslant 2)$种不同的颜色, 给图5中n个区域1, 2, $\cdots$, n涂色, 要求任意2个相邻区域涂不同颜色, 且规定区域1只涂一种指定颜色(如红色), 则不同的涂色方法有多少种?

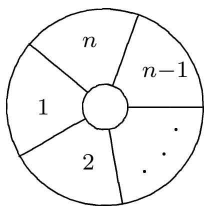


图 5

简析: 可以推测

$$ma_n=(m-1)^n+(-1)^n(m-1).$$

事实上, 假设区域1不固定只涂一种颜色, 可任意选涂, 记符合要求的涂色方法为$A_n(=ma_n)$种, 则区域1有m种涂法, 其他区域均各有$m-1$种涂法. 分成两类: ① 是区域n与区域1涂同色, 相当于将这2个区域合并成1个区域共$n-1$个区域, 这样符合要求的涂色种数为A_{n-1}; ② 是区域n与区域1涂不同色, 则有A_n种, 故有

$$A_k+A_{k-1}=m(m-1)^{k-1},\ k=2, 3, \cdots, n.$$

于是$(-1)^kA_k-(-1)^{k-1}A_{k-1}=-m(1-m)^{k-1}$, 令$k=3, \cdots, n$求和得

$$\begin{aligned}&(-1)^nA_n-A_2\\&=\sum_{k=3}^n[(-1)^kA_k-(-1)^{k-1}A_{k-1}]\\&=-m\sum_{k=3}^n(1-m)^{k-1}\\&=(1-m)^n-(1-m)^2,\end{aligned}$$

由$A_2=m(m-1)$得

$A_n=(m-1)^n+(-1)^n(m-1)$, 即

$$a_n=\frac{A_n}{m}=\frac{(m-1)^n+(-1)^n(m-1)}{m}.$$

注: 2001年全国高中数学联赛题: 如图6, 在正六边形的6个区域栽种观赏植物, 要求同一区域种同一种植物, 相邻的2个区域种不同植物. 现有4种不同植物可供选择, 则有____种栽种方法.

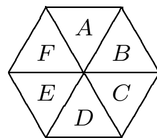


图 6

此题是推广$3'$的特例:

$$A_6=(4-1)^6+(-1)^6(4-1)=732.$$

进一步, 受推广$3'$启发, 有

推广4　用$m(m\geqslant 2)$种不同颜色, 给图7中$n+1$区域Ω, 1, 2, $\cdots$, n涂色, 要求任意2个相邻区域涂不同颜色, 则不同涂色方法有多少种?

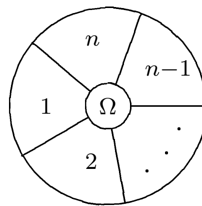


图 7

简析: 设符合要求的涂色种数为B_n, 则区域Ω有m种涂法, 其他n个区域均与区域Ω

(下转第8–45页)

一堂圆锥曲线习题课的意外探索

437100 湖北省鄂南高中 张必平

不可小视我们的学生, 他们对数学的感悟已经不仅仅限于课堂, 而会在任何一个你不经意的时刻, 猝不及防地跃然而至. 不久前的一堂习题课上, 我又一次领略.

师: 本节课我们继续探讨直线与圆锥曲线位置关系问题, 请看下面一道例题.

例 (2004年高考天津卷第22题) 椭圆的中心是原点O, 它的短轴长为$2\sqrt{2}$, 相应于焦点$F(c,0)\ (c>0)$的准线l与x轴相交于点A, $|OF|=2|FA|$, 过点A的直线与椭圆相交于P、Q两点.

(I) 求椭圆的方程及离心率;

(Ⅱ) 若$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$, 求直线$PQ$的方程;

(Ⅲ) 设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}\ (\lambda>1)$, 过点$P$且平行于准线$l$的直线与椭圆相交于另一点$M$, 证明$\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$.

第I小题比较简单, 不一会儿, 便有许多同学计算出了正确结果, 椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$, 离心率$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

下面是第Ⅱ问的探究过程.

一、基本思想, 展现通法

师: 哪位同学谈谈第II小题的分析思路?

生1: $\because\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$, $\therefore\ OP\perp OQ$,

$\therefore\ k_{OP}\cdot k_{OQ}=-1$, 由(I)可得$A(3,0)$, 设$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$, 直线$PQ: y=k(x-3)$, 则$k_{OP}k_{OQ}=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-1$, 于是$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+k(x_1-3)\cdot k(x_2-3)=0$, 即

$$(1+k^2)x_1x_2-3k^2(x_1+x_2)+9k^2=0. \quad ①$$

以下联立直线PQ和椭圆的方程, 利用判别式和韦达定理求解.

生2: 直接根据向量的数量积, 便有$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+k(x_1-3)\cdot k(x_2-3)=0$, 从而得出 ① 式.

师: 很好! 生1揭示了问题的实质——相交弦对定点的张角问题; 生2利用向量知识将张角解析化, 节奏更明快. 向量本身就是一个非常好的解析化工具, 本题设计在向量和解析几何的交汇点处, 我们没有必要舍近求远. 两位同学找到了 ① 式, 打通了我们的解题思路, 此后呈现的是一种模式化的操作. 下面就请同学们"操作"吧.

生3 (计算能力非常好的一位同学): 虽说此后的解题过程只需机械性进行, 但计算量还是有点大.

我将他的解答投影如下:

解: 接分析, 由$\begin{cases} y=k(x-3),\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$

得$(3k^2+1)x^2-18k^2x+27k^2-6=0$,

依题意$\Delta=12(2-3k^2)>0$,

得$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<k<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

$$x_1+x_2=\frac{18k^2}{3k^2+1}, \quad ②$$

$$x_1x_2=\frac{27k^2-6}{3k^2+1}. \quad ③$$

将 ②、③ 代入 ① 整理得$5k^2=1$, 从而$k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}\in\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

所以直线PQ: $x-\sqrt{5}y-3=0$或$x+\sqrt{5}y-3=0$.

师: ① 式是几何条件代数化的产物, 它的发现, 使我们确信我们已经找到了解题思路, 然而要将问题彻底解决, 仍要费一番周折, 这也正是不少解析几何问题的一大特色. 上述解法将张角解析化, 然后利用判别式和韦达定理

来解决问题, 正是我们处理弦对定点张角问题的"通法".

这时, 学生4将手轻轻举起.

二、意外错解, 辨析错因

生4: 第Ⅱ小题的答案好象不对, 我找到了一种简单解法, 直线l的斜率应该等于$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

我将学生4的解答投影出来.

解: 如图1, 当PQ在x轴上方时,

设$Q(\sqrt{6}\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\varphi)$,

$P\left(\sqrt{6}\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right), \sqrt{2}\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$,

即$P(-\sqrt{6}\sin\varphi, \sqrt{2}\cos\varphi)$, 其中$\varphi$为锐角. 由$k_{AQ}=k_{AP}$, 得

$$\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{\sqrt{6}\cos\varphi-3}=\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{-\sqrt{6}\sin\varphi-3},$$

整理得 $\cos\varphi-\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

注意到$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$,

解得$\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$,

$k_{AQ}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\varphi}{\sqrt{6}\cos\varphi-3}=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$,

考虑到PQ还可能在x轴下方,

所以直线$PQ: y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}(x-3)$, 即$x\pm\sqrt{6}y-3=0$.

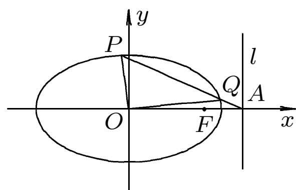


图 1

意外解法带来了一个全新结果. 我意识到生4犯了一个概念错误, 又担心后面的例题没时间讲, 犹豫了一下还是决定让学生去探究其中的错误原因.

生5(立即指出): 我认为他的第一步设点就有问题. 椭圆的参数方程中, 参数φ表示离心角, 图中点Q的离心角应该不是$\angle xOQ$.

生4: 我并没有指明$\varphi=\angle xOQ$啊, 我认为$\angle POQ=90^\circ$, 那么点P、Q的离心角也相差90°.

经过这两位同学的"爆炒", 教室内的气氛一下子活跃了, 同学们不由自主地讨论开来.

师: 问题的关键在于点P、Q的离心角是否相差90°. 让我们向课本请教怎样作出点P、Q的离心角吧. (直接给出结论不会有好的效果, 其结果往往是"一听就懂, 过后就忘")

我挑选了坐在前排的一位女生的作图, 投影出来, 并请她解释.

生6: 如图2, 点Q的离心角$\theta=\angle xON$, 点P的离心角$=\angle xOM$, 这两个离心角相差$\angle MON<\angle POQ=90^\circ$.

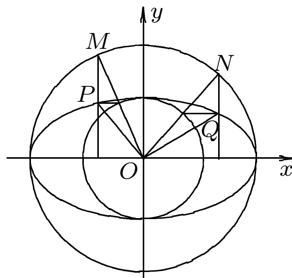


图 2

师: 很好! 生4的设法虽然不对, 但使我们对椭圆参数方程中离心角有了更深刻的认识, 感谢生4的错解, 为我们提供了一个非常好的重新认知离心角的素材.

三、创新解法, 深入探究

正准备开始探求第Ⅲ小题的解法, ……

生7: 老师, 且慢! 我将生4的设法改进了一下, 发现了一个定值.

设$Q(|OQ|\cos\theta, |OQ|\sin\theta)$,

$P\left(|OP|\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right), |OP|\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$,

即$P(-|OP|\sin\theta, |OP|\cos\theta)$, 其中$\theta=\angle xOQ$为锐角, 代入椭圆方程得

$$\frac{|OP|^2\sin^2\theta}{6}+\frac{|OP|^2\cos^2\theta}{2}=1,$$

$$\frac{|OQ|^2\cos^2\theta}{6}+\frac{|OQ|^2\sin^2\theta}{2}=1,$$

$$\therefore \frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\left(\frac{\sin^2\theta}{6}+\frac{\cos^2\theta}{2}\right)+\left(\frac{\cos^2\theta}{6}+\frac{\sin^2\theta}{2}\right)=\frac{2}{3}\text{为定值.}$$

利用老教材中极坐标的知识也不难得出这个结果, 学生7受错解启发, 采用类似极坐标的思想方法推出这一定值, 着实令人称道!

师:这个发现真棒! 可是本题最终要求直线PQ的方程,这个发现有利用价值吗?

不一会儿,生8要求发言.

生8:我将上述定值变形为

$$\frac{|OP|\cdot|OQ|}{\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

这不正是Rt$\triangle OPQ$斜边上的高吗? 因此点O到直线$PQ: y=k(x-3)$的距离$d=\dfrac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

师:我隐约感觉到这里面可能隐藏着一个更为一般的结论,$\cdots\cdots$.

也许是受到精彩解法的鼓舞,学生们一个个跃跃欲试.

生8:这并不困难! 设直线l与椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$相交于$P$、$Q$两点,且$OP\perp OQ$,同生7设$P$、$Q$两点的坐标,则

$$\frac{|OP|^2\sin^2\theta}{a^2}+\frac{|OP|^2\cos^2\theta}{b^2}=1,$$

$$\frac{|OQ|^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{|OQ|^2\sin^2\theta}{b^2}=1,$$

$$\therefore\ \frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)+\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

因此,椭圆中心O到直线l的距离$d=\dfrac{|OP|\cdot|OQ|}{\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2}}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$为定值.

结论1 设直线l与椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$相交于$P$、$Q$两点,且$OP\perp OQ$,则椭圆中心$O$到直线$l$的距离$d=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

师:太好了! 这一结论揭示了椭圆中弦对中心张直角的性质,有了这一结果,回头再解第Ⅱ小题,可谓手到擒来啊.

原点O到直线 $PQ: y=k(x-3)$的距离为$d=\dfrac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6+2}}$,解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以直线PQ的方程为$x-\sqrt{5}y-3=0$或$x+\sqrt{5}y-3=0$.

此时教室内的气氛空前热烈,而我却在考虑是总结一下转入第Ⅲ小题的分析,还是进一步探究双曲线中是否也有类似的性质呢?

这时生9举手示意有话要说.

四、逆向思考,再掀波澜

生9:在"通法"中,有$\Delta>0$来保证直线与椭圆相交. 上述方法利用结论1解题似乎有点不够严密. 由$OP\perp OQ$可以得到$d=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,但反过来,根据$d=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$是否能保证直线$l$与椭圆相交并且$OP\perp OQ$呢?

是啊,事实上这是一个逻辑问题,也就是我们在求值过程中施行的是否是等价转化,否则便有增解的可能. 我不禁赞叹,虽然上述解法得出第Ⅱ小题的结果似无疑义,但其思维的严谨性很令人赞赏.

我在黑板上写下了结论1的逆命题,作为结论2,请同学们探究其真假.

结论2 若椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的中心$O$到直线$l$的距离$d=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,则直线$l$与椭圆相交于$P$、$Q$两点,且$OP\perp OQ$.

生10:由于$d=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}<b$,所以$O$点在$l$上的射影在椭圆内部(如图3),因此直线$l$与椭圆相交于$P$、$Q$两点. 固定$OP$,转动$OQ$,$O$到直线$l$的距离$d$在变化,为了使$d=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,只能有$OP\perp OQ$. 我想结论2应该是真命题吧.

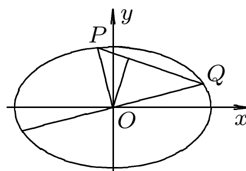


图 3

观察全班,有赞叹者,然而大部分人还是显得有些茫然.

师:生10对于$OP\perp OQ$的解释很机智,但只是一种直感,缺少必要的逻辑证明. 这是一个图形定位问题,大家不妨先回忆一下初中平面几何里是怎么处理这类问题的.

过了一会儿,还是生10站起来:

如图4,假设OP不垂直于OQ,过原点O作弦$RS\perp OP$,由结论1,点O到PR、PS的

研究性数学问题的类型与功能

226100　江苏省海门中学　汤文卿

一、研究性数学问题的基本内涵

随着新课程改革的不断深入, 一类崭新的题型——研究性问题以其新颖、独特、前卫的特点闪亮登场, 频频出现在各地中考试卷中, 异彩纷呈, 成为中考命题的焦点之一. 这类题以新情境、新概念、新知识、新方法为载体出现, 提供有关数学知识、数学方法、数学规律、生活知识、生产实际等各方面的信息, 要求通过对给定信息的分析、整理、开发与研究, 然后加以应用. 它寓研究性、抽象性、逻辑性、应用性于一体, 其总的特征是: 情境新、立意高、设计巧、方法活、考知识、考方法、考能力、考素质、考潜能. 本文以近年中考试题为例, 就其常见类型与教育功能作一阐述.

二、研究性数学问题的类型

就研究的对象而言, 研究性问题可分为以下几类:

1. 研究规律

这类题中的信息提供的是一种规律, 但这些规律隐含在题目中, 有待挖掘、发现, 一般要求通过研究把规律归纳出来, 才能解决相关问题. 解题的关键是具有较强的观察能力、归纳概括能力, 它可考查思维的深刻性.

题1　(2004年徐州市) 下面图形是由边长

距离均为 $d=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 于是过点 P 有三条直线 PQ、PR、PS 都与圆 $x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 相切, 矛盾. 因此 $OP\perp OQ$.

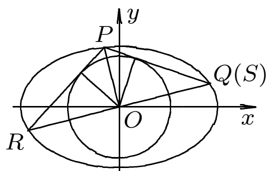


图 4

许多学生发出了由衷的赞叹声, 这时下课铃响了.

我出了两道思考题, 请大家课后思考.

思考题:

1. 将结论1和结论2合成一个命题, 可以得到椭圆的弦对中心张直角的性质. 请探究双曲线的弦对中心张直角是否也有类似的性质?

2. 请找两道应用上述性质的习题并予以解答.

第二天, 我收到了下面两个定理和它们应用的不少习题.

定理1　直线 l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 相交于 P、Q 两点, 则 $OP\perp OQ$ 的充要条件是椭圆中心 O 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

定理2　直线 l 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 相交于 P、Q 两点, 则

(1) 当 $b>a>0$ 时, $OP\perp OQ$ 的充要条件是双曲线中心 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$;

(2) 当 $a\geqslant b>0$ 时, 不可能有 $OP\perp OQ$.

证明和定理1类似, 略.

整整一节课, 一道例题的第Ⅲ小题还没来得及开讲, 何其少矣! 何况还打乱了我原定的计划, 确实有些遗憾. 可仔细一想, 同学们这样乐于讨论和探索问题, 这是一种多么可贵的氛围. 如此看来这节课的收获又是何其大也!

为1的正方形按照某种规律排列而成的:

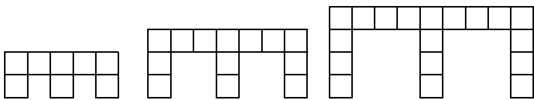


图 1 图 2 图 3

(1) 观察图形, 填写下表:

图形	图1	图2	图3
正方形个数	8	13	18
图形的周长	18	28	38

(2) 推测第n个图形中正方形个数为___, 周长为___ (用含n的代数式表示).

(3) 这些图形中, 任意一个图形的周长y与它所含正方形个数x之间的函数关系式是___.

简解: (1) 见表; (2) $5n+3$, $10n+8$; (3) $y=2x+2$.

2. 研究方法

这类题中的信息提供的是解决问题的方法, 一般要求通过阅读、研究, 把握方法, 并把这一方法加以运用、推广、延伸等, 解决问题的数学方法是类比, 它可考查知识的迁移能力.

题2 (2004年甘肃省) 阅读下面材料并解答问题: 将直线$l: y=2x-3$向右平移3个单位, 再向上平移1个单位, 求平移后直线解析式.

解: 在直线l上任取两点$A(1,-1)$、$B(0,-3)$, 点A、B分别向右平移3个单位, 再向上平移1个单位各得$A'(4,0)$、$B'(3,-2)$, 从而平移后直线的解析式为$y=2x-8$.

根据以上信息解答问题: 求把抛物线$y=-x^2+2x+3$向左平移1个单位, 再向下平移2个单位后所得的解析式.

简解: 原抛物线顶点为$A(1,4)$, 两次平移后得$A'(0,2)$, 故所求解析式为$y=-x^2+2$.

3. 研究规则

这类题中的信息提供的是一种规则, 要求通过对它的研究, 熟练运用规则正向、逆向解题. 它可考查思维的灵活性.

题3 (2003年杭州市) 根据指令$[s,A]$($s\geqslant 0$, $0°<A<180°$), 机器人在平面上能完成下列动作: 先原地逆时针旋转角度A, 再朝其面对的方向沿直线行走距离s. 现机器人在平面直角坐标系的原点, 且面对x轴的正方向.

(1) 若给机器人下指令$[4,60°]$, 则机器人应移动到点____;

(2) 请你给机器人下一个指令____, 使其移动到点$(-5,5)$.

简解: 本题渗透了极坐标观点, 根据规则易得: (1) $(2,2\sqrt{3})$; (2) $(5\sqrt{2},135°)$.

4. 研究性质

这类题中的信息提供的是一种性质, 有的直接给出, 有的隐含在题目中, 要求发现、研究性质, 并巧妙地运用性质解题. 它对学生的综合素质要求较高, 思维跨度大, 可考查思维的广阔性.

题4 (2003年厦门市) 平面直角坐标系中有6个点: $A(3,3)$、$B(1,1)$、$C(9,1)$、$D(5,3)$、$E(-1,-9)$、$F(-2,-0.5)$. 请将这6个点按下列要求分成两类, 并写出同类点具有而另一类点不具有的一个特征. (1) 甲类含2个点, 乙类含其余4个点. 甲类: 点___, ___是同一类点, 其特征是________. 乙类: 点___, ___, ___, ___是同一类点, 其特征是________.

(2) 甲类含3个点, 乙类含其余3个点. 甲类: 点___, ___, ___是同一类点, 其特征是________. 乙类: 点___, ___, ___是同一类点, 其特征是________.

简解: (1) 甲类: E、F, 它们都在第三象限. 乙类: A、B、C、D, 它们都在第一象限.

(2) 甲类: A、C、E, 横、纵坐标满足关系式$xy=9$. 乙类: B、D、F, 横、纵坐标满足关系式$y=0.5x+0.5$.

题5 (2002年扬州中学招生题) 图4是计算机装置示意图, A、B是数据输入口, C是计算输出口, 计算过程是由A、B分别输入自然数m、n, 计算后自然数k由C输出, 这种计算机装置完成的计算满足以下3个性质: ① 若A、B均输入1, 则输出结果为1; ② 若A输入任何固定的自然数不变, B输入自然数增大1, 则输出结果比原来增大2; ③ 若B输入1, A输入自然数增大1, 则输出结果为原来的2倍. 试求下列3种情形的输出结果分别为多少?

(1) 若A输入1, B输入自然数n;

(2) 若B输入1, A输入自然数m;

(3) 若A输入自然数m, B输入自然数n.

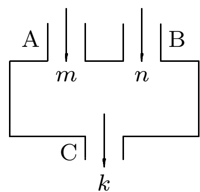


图 4

简解: 记输出数k为$C(m,n)$, 则由3个性质得$C(1,1)=1$, $C(m,n)=C(m,n-1)+2$, $C(m,1)=2C(m-1,1)$.

(1) $C(1,n)=C(1,n-1)+2=C(1,n-2)+2\times 2=\cdots=C(1,1)+2(n-1)=1+2(n-1)=2n-1$;

(2) $C(m,1)=2C(m-1,1)=2^2\cdot C(m-2,1)=\cdots=2^{m-1}C(1,1)=2^{m-1}$;

(3) $C(m,n)=C(m,n-1)+2=C(m,n-2)+2\times 2=\cdots=C(m,1)+2(n-1)=2\cdot C(m-1,1)+2(n-1)=\cdots=2^{m-1}C(1,1)+2n-2=2^{m-1}+2n-2$.

5. *研究方案*

这类题一般是通过研究, 设计出符合要求的某种问题的方案, 或通过对给定方案的研究, 评价其优劣, 并改进方案. 它对比较、理解能力要求较高, 可考查思维的批判性, 提高优化意识.

题6 (2003年安徽省) 如图5 ～图7, 这些等腰三角形与正三角形的形状有差异, 我们把它与正三角形的接近程度称为"正度". 研究"正度"时应保证相似三角形的"正度"相等. 等腰三角形的底和腰分别为a、b, 底角和顶角分别为α、β. 要求"正度"的值是非负数.

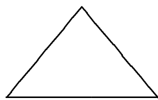


图 5

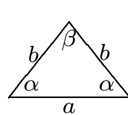


图 6

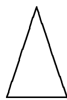


图 7

同学甲认为: 可用式子$|a-b|$表示"正度", $|a-b|$的值越小, 表示等腰三角形越接近正三角形.

同学乙认为: 可用式子$|\alpha-\beta|$表示"正度", $|\alpha-\beta|$的值越小, 表示等腰三角形越接近正三角形.

探究: (1) 他们的方案哪个较为合理? 为什么? (2) 对你认为不够合理的方案请加以改进(给出式子即可); (3) 请再给出一种衡量"正度"的表达式.

简解: (1) 乙的方案较合理, $\because$ $|\alpha-\beta|$的值越小, α、β越接近60°, 等腰三角形越接近正三角形, 且能保证相似三角形的"正度"相等. 甲的方案不合理, 不能保证相似三角形的"正度"相等. 如边长为4、4、2和8、8、4的两个等腰三角形相似, 但$|2-4|\neq|4-8|$. (2) 甲的方案可改为用$\dfrac{|a-b|}{ka}$、$\dfrac{|a-b|}{kb}$ (k为正数) 等来表示"正度". (3) 还可用$|\alpha-60^\circ|$, $|\beta-60^\circ|$、$\alpha+|\beta-120^\circ|$, $[(\alpha-60^\circ)^2+(\beta-60^\circ)^2]$等来表示"正度".

6. *研究命题*

这类题常常把特殊情形的结论推广为一般情形来研究, 体现了特殊到一般的数学思想方法, 命题提供的思维空间广阔, 求解时既可套用题目中解决特殊情形时所用的方法, 也可运用创新方法, 它可考查思维的开放性及探究能力、创新能力.

题7 (2001年荆门市) 观察两块三角板, 它们有一个共同性质: $\angle A=2\angle B$, 我们由此进行思考. 图8中CD为高, $\therefore$ $AD=\dfrac{b}{2}$, $BD=c-\dfrac{b}{2}$. $\because$ $\triangle CDB\backsim\triangle ACB$, $\therefore$ $\dfrac{a}{c}=\dfrac{BD}{a}$, 即$a^2=c\cdot BD$.

同理$b^2=c\cdot AD$. 于是$a^2-b^2=c(BD-AD)=c\left[\left(c-\dfrac{b}{2}\right)-\dfrac{b}{2}\right]=c(c-b)=c(2b-b)=bc$. 对于图9, $\because$ $a^2=b^2+c^2$, $b=c$, 故也有$a^2-b^2=bc$. $\therefore$ 两块三角板都有$a^2-b^2=bc$. 在$\triangle ABC$中, 如果一个内角等于另一个内角的2倍, 我们称这种三角形为倍角三角形, 两块三角板都是特殊的倍角三角形. 对于任意的倍角三角形, 上面的性质仍然成立吗? 如图10, $\triangle ABC$中, $\angle A=2\angle B$, 则$a^2-b^2=bc$是否正确? 请证明.

(下转第8–9页)

定义域——函数问题致错的“隐形杀手”

311811 浙江省诸暨市学勉中学 郭天平

定义域作为构成函数的三要素之一, 它直接制约着函数的解析式、图象和性质, 在解题过程中若忽视定义域这个重要条件, 将导致错解. 现对几类题型作扼要的剖析如下.

一、判断函数关系

例1 判断式子$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$是表示“$y$是$x$的函数”吗?

错解: y是x的函数.

剖析: 由于函数的定义域是非空的数集, 而上式中, 由$\begin{cases}1-x^2>0\\ x^2-1>0\end{cases}\Longrightarrow x\in\varnothing$. 根据函数定义, 上式不表示“$y$是$x$的函数”; 由于忽略了函数的定义域是非空集而导致了解题错误.

二、求函数最值(或值域)

例2 求函数$y=\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$的值域.

错解:令$\sin x+\cos x=t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,

$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$,

$\therefore\ y=\dfrac{\frac{1}{2}(t^2-1)}{1+t}$ ……①

$y=\dfrac{1}{2}(t-1)$ ……②

$\therefore\ \dfrac{1}{2}(-\sqrt{2}-1)\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$.

故函数的值域为$\left[\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2},\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$.

剖析:上述解法中由 ① 向 ② 变形中, 应考虑定义域的变化, 函数式 ① 中$t=\sin x+\cos x\neq-1$, $\therefore\ y\neq\dfrac{1}{2}(-1-1)$,即$y\neq-1$, 所以原函数的值域是

$$\left[\frac{-\sqrt{2}-1}{2},-1\right)\cup\left(-1,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right].$$

三、求函数周期

例3 求函数$y=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$的周期.

错解: $\because\ y=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\tan 2x$.

$\therefore\ T=\dfrac{\pi}{2}$.

剖析:原函数$y=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$解析式的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq\dfrac{k}{2}\pi+\dfrac{\pi}{4},\text{且}\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$, 而运用公式后所得函数$y=\tan 2x$的定义域为

$$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\},$$

两个函数的定义域不同, 变形后忽视了定义域扩大致错. 因此, 函数的最小正周期为π.

四、求函数单调区间

例4 求函数$f(x)=\lg(4-x^2)$的单调递增区间.

错解:令$t=4-x^2$, 则$y=\lg t$, 它是增函数. $\because\ t=4-x^2$在$(-\infty,0]$上为增函数, 由复合函数的单调性可知, 函数$f(x)=\lg(4-x^2)$在$(-\infty,0]$上为增函数, 即原函数的单调增区间是$(-\infty,0]$.

剖析: 判断函数的单调性, 必须先求出函数的定义域, 单调区间应是定义域的子区间. 正确的解法应先确定函数的定义域. 由$4-x^2>0$, 得$f(x)$的定义域为$(-2,2)$. 由此可确定函数$f(x)=\lg(4-x^2)$的单调增区间是$(-2,0]$.

五、求函数的奇偶性

例5 已知函数$f(x^2-1)=\lg\left(\dfrac{x^2}{x^2-2}\right)$, 试判断$f(x)$的奇偶性.

错解:令$t=x^2-1$, 则$x^2=t+1$. $\therefore\ f(t)=\lg\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)$, 即$f(x)=\lg\dfrac{x+1}{x-1}$, $\because\ f(-x)$

以数列为载体的数学综合问题展评

063600 河北省乐亭二中 史彩玉

数列是高中数学的重要内容.根据对近年的高考试卷的分析, 数列是每年必考内容之一, 并且常和函数、不等式、方程等相关内容交汇在一起进行综合. 由于新教材又增加了导数、向量等新内容, 使数列题更有了施展的舞台.本文直击数列的综合问题, 将题目展示给读者.

一、数列与方程综合

例1 已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d\neq 0$, 对任意$n\in\mathbf{N}^*$, 都有$a_n\neq 0$.

(1) 求证: 对任意$n\in\mathbf{N}^*$, 所有方程$a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$均有一个相同的实数根;

(2) 若$a_1=d$, 方程$a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}$

$=\lg\dfrac{-x+1}{-x-1}=-\lg\dfrac{x+1}{x-1}=-f(x)$, $\therefore$ $f(x)$为奇函数.

剖析: 由于函数奇偶性是建立在定义域关于原点对称的前提下的. 即首先应求出原函数的定义域, 若定义域不关于原点对称, 则原函数为非奇非偶函数, 若定义域关于原点对称, 则再用奇偶性的定义判断. 此题由$\dfrac{x^2}{x^2-2}>0$, 即$x^2>2$, $\therefore$ $t=x^2-1>1$, 故得函数$f(x)$的定义域为$\{x|x>1\}$不关于原点对称, 所以$f(x)$为非奇非偶函数.

六、求函数的反函数

例6 求函数$f(x)=1-\sqrt{4-x^2}$ $(-2\leqslant x\leqslant 0)$的反函数.

错解: 由$f(x)=1-\sqrt{4-x^2}$, 得$\sqrt{4-x^2}=1-y$, 两边平方得$x^2=3+2y-y^2$,

$\because$ $-2\leqslant x\leqslant 0$,

$\therefore$ $x=-\sqrt{3+2y-y^2}$,

由$3+2y-y^2\geqslant 0$, 得$-1\leqslant y\leqslant 3$, 故原函数的反函数是

$f^{-1}(x)=-\sqrt{3+2x-x^2}\,(-1\leqslant x\leqslant 3)$.

剖析: 根据反函数的定义域是原函数的值域, 由原函数的定义域$\{x|-2\leqslant x\leqslant 0\}$, 得$y=1-\sqrt{4-x^2}$的值域应为$\{y|-1\leqslant y\leqslant 1\}$, 所以原函数的反函数是

$f^{-1}(x)=-\sqrt{3+2x-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

七、求函数解析式

例7 已知$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$, 求函数$f(x)$的解析式.

错解: 令$t=\sqrt{x}+1$, 则$\sqrt{x}=t-1$, $x=(t-1)^2$,

$\therefore$ $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$, $\therefore$ $f(x)=x^2-1$.

剖析: 因为$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$隐含着定义域是$x\geqslant 0$, 所以由$t=\sqrt{x}+1$得$t\geqslant 1$, $\therefore$ $f(t)=t^2-1$的定义域为$t\geqslant 1$, 即函数$f(x)$的解析式应加上定义域$x\geqslant 1$, 这样才能保证转化的等价性.

八、求函数方程或不等式

例8 解方程$\log_{x-1}(x+5)=2$.

错解: 原方程化为$(x-1)^2=x+5$, $\therefore$ $x^2-3x-4=0$, $\therefore$ $x=4$或$x=-1$, $\because$ $x+5>0$, $\therefore$ $x=4$和$x=-1$都是原方程的根.

剖析: 对解函数不等式或方程, 应注意到原函数的定义域的限制条件, 此题虽考虑了真数大于零, 但忽视了对数底数必须大于零且不等于1的隐含条件, 使求解的范围扩大, 产生增根, 正确的解应为$x=4$.

综上可知, 考察函数的定义域是判断函数有无意义的前提条件, 当研究函数的图象和性质时, 应首先考虑函数的定义域, 以防止变形的不等价性, 避免由此引起的解题错误.

$=0$的另一个不同根为a_n, $b_n=\dfrac{1}{1+a_n}$, 求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(3) 在(2)的条件下, 设$S_n=\dfrac{1}{b_1b_2}+\dfrac{1}{b_2b_3}+\cdots+\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

【解析】(1) ∵ $\{a_n\}$是等差数列, ∴ $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$, 即$a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$, $n\in\mathbf{N}^*$, $x=-1$是所有方程$a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$的相同的实根.

(2) 对任意$n\in\mathbf{N}^*$, 由韦达定理得$(-1)\cdot a_n=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{(n+2)d}{nd}=1+\dfrac{2}{n}$, ∴ $\dfrac{1}{1+a_n}=-\dfrac{n}{2}$, 即$b_n=-\dfrac{n}{2}$.

(3) ∵ $b_n=-\dfrac{n}{2}$, ∴ $\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\left(-\dfrac{2}{n}\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{n+1}\right)=\dfrac{4}{n(n+1)}=4\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

$$\therefore\ S_n=4\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=4.$$

例2　已知三个数a、b、c成等比数列, 且$a+b+c=m\,(m>0)$, 求b的取值范围.

【解析】由已知a、b、c成等比数列, 且$a+b+c=m\,(m>0)$, 得$\begin{cases}a+c=m-b,\\ ac=b^2,\end{cases}$ 利用韦达定理, 不妨将a、c看成方程$x^2+(b-m)x+b^2=0$的两根. 所以方程必有实数根, 则 $\Delta=(b-m)^2-4b^2\geqslant 0$, 解得$-m\leqslant b\leqslant\dfrac{m}{3}$, 但$b\neq 0$.

点评: 数列与方程交汇的题目, 通常使用一元二次方程, 利用方程有实数根时$\Delta\geqslant 0$, 同时两个实数根遵守韦达定理, 找到解决问题的突破口.

二、数列与不等式综合

例3　已知函数$f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, $x\in(0,+\infty)$, 数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n)$, $n=1,2,3,\cdots$, 且$x_1=1$.

(1) 设$a_n=|x_n-\sqrt{2}|$, 证明: $a_{n+1}<a_n$;

(2) 设(1)中的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 证明$S_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】(1) 由题意得

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=|x_{n+1}-\sqrt{2}|=|f(x_n)-\sqrt{2}|\\&=\left|\frac{x_n+2}{x_n+1}-\sqrt{2}\right|\\&=\left|\frac{x_n+2-\sqrt{2}x_n-\sqrt{2}}{x_n+1}\right|\\&=(\sqrt{2}-1)\cdot\frac{|x_n-\sqrt{2}|}{|x_n+1|},\end{aligned}$$

又由条件可知$x_n>0$, ∴ $a_{n+1}<(\sqrt{2}-1)\cdot|x_n-\sqrt{2}|<|x_n-\sqrt{2}|=a_n$, 故$a_{n+1}<a_n$.

(2) 证明: 由(1)的过程可知

$a_{n+1}<(\sqrt{2}-1)\cdot|x_n-\sqrt{2}|<(\sqrt{2}-1)^2\cdot|x_{n-1}-\sqrt{2}|<\cdots<(\sqrt{2}-1)^n\cdot|x_1-\sqrt{2}|=(\sqrt{2}-1)^{n+1}$,

$$\begin{aligned}\therefore\ S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\&<(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)^2+\cdots+(\sqrt{2}-1)^n\\&=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}[1-(\sqrt{2}-1)^n]\\&<\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

点评: 数列与不等式综合出现的题目, 属于传统题目, 常常利用不等式的性质和其他相关知识, 进行推算论证, 这类题目有一定的难度.

三、数列与函数综合

例4　已知函数$f(x)=\ln(2-x)+ax$在开区间$(0,1)$内是增函数.

(1) 求实数a的取值范围;

(2) 若数列$\{a_n\}$满足$a_1\in(0,1)$, $a_{n+1}=\ln(2-a_n)+a_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明:

$0<a_n<a_{n+1}<1$;

(3) 若数列$\{b_n\}$满足$b_1\in(0,1)$, $b_{n+1}=2\ln(2-b_n)+b_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$, 问数列$\{b_n\}$是否单调?

【解析】(1) ∵ 函数$f(x)=\ln(2-x)+ax$在开区间$(0,1)$内是增函数,

∴ $f'(x)=-\dfrac{1}{2-x}+a>0$, $a>\dfrac{1}{2-x}$, 由于$x\in(0,1)$, 故$a\geqslant 1$.

(2) 函数 $f(x)=\ln(2-x)+ax$ 在开区间 $(0,1)$ 内是增函数, 若 $a=1$, 则 $f(x)\in(\ln 2,1)$, 即 $f(x)<1$. 而 $a_{n+1}=\ln(2-a_n)+a_n$.

用数学归纳法证明: $0<a_n<a_{n+1}<1$.

① 当 $n=1$ 时, $a_1\in(0,1)$;

② 假设当 $n=k$ 时, $0<a_k<a_{k+1}<1$, 则当 $n=k+1$ 时, 由于 $a_{k+2}=\ln(2-a_{k+1})+a_{k+1}>0$, $a_{k+2}=\ln(2-a_{k+1})+a_{k+1}<1$, 且 $a_{k+2}-a_{k+1}=\ln(2-a_{k+1})>0$,

$\therefore a_{k+2}>a_{k+1}$,

$\therefore 0<a_{k+1}<a_{k+2}<1$,

由数学归纳法 $0<a_n<a_{n+1}<1$ 成立.

(3) 不单调.

$\because b_1\in(0,1)$, $b_{n+1}=2\ln(2-b_n)+b_n\,(b\in\mathbf{N}^*)$, 不妨设 $b_1=\dfrac{1}{2}$, 则 $b_2=2\ln(2-b_1)+b_1=\ln\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{2}>b_1$, 而 $b_3=2\ln(2-b_2)+b_2<b_2$.

例5　已知二次函数 $y=f(x)$ 经过 $(0,10)$, 导函数 $f'(x)=2x-5$, 当 $x\in(n,n+1]\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 时, $f(x)$ 含有整数的个数记为 a_n, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】 $\because$ 二次函数 $y=f(x)$ 经过 $(0,10)$, 设 $f(x)=ax^2+bx+10$,

$\therefore f'(x)=2ax+b=2x-5$,

$\therefore a=1, b=-5$,

$\therefore f(x)=x^2-5x+10$.

当 $x\geqslant\dfrac{5}{2}$ 时, $f(x)$ 为增函数,

$\therefore$ 当 $n\geqslant 3$ 时, $a_n=f(n+1)-f(n)=2n-4$;

当 $n=1$ 时, $x\in(1,2]$, $f(x)$ 为减函数, $f(x)\in[f(2),f(1))=[4,6)$, 包含两个整数,

$\therefore a_1=2$; 当 $n=2$ 时, $x\in(2,3]$, $f(x)\in[3.75,4)$, 不含整数, $\therefore a_2=0$;

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}2, & n=1,\\ 0, & n=2,\\ 2n-4, & n\geqslant 3.\end{cases}$$

点评: 数列就是函数, 只是数列的定义域是正整数集合或其子集, 表达形式与函数的解析式有所区别, 但透过现象看本质, 利用函数的性质分析数列的性质, 再顺理成章不过, 因此, 这类题目常考常新, 大有文章可做, 应当引起足够的重视.

四、数列与导函数综合

例6　设曲线 $y=x^2+x+1-\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线为 l, 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 且点 (a_n,a_{n+1}) 在直线 l 上.

(1) 求证: 数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列, 并求 a_n;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

【解析】 (1) 证明: 由 $y=x^2+x+1-\ln x$, 知 $x=1$ 时, $y=3$.

又因为 $y'\Big|_{x=1}=2x+1-\dfrac{1}{x}\Big|_{x=1}=2$, 所以切线方程为 $y-3=2(x-1)$, 即 $y=2x+1$. $\because (a_n,a_{n+1})$ 在直线 l 上, $\therefore a_{n+1}=2a_n+1$, $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$, 即 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$, $\therefore \{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=2$ 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore a_n+1=2\cdot 2^{n-1}$, 即 $a_n=2^n-1\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 由 (1) 可知 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=(2-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n=2^{n+1}-n-2$.

例7　过点 $P(1,0)$ 作曲线 $C: y=x^k(x\in(0,+\infty), k>1)$ 的切线, 切点为 Q_1, 设点 Q_1 在 x 轴上的投影是点 P_1; 又过 P_1 作曲线 C 的切线, 切点为 Q_2, 设点 Q_2 在 x 轴上的投影是点 P_2, $\cdots$, 依次下去, 得到一系列点 Q_1, Q_2, $\cdots$, Q_n, $\cdots$. 设点 Q_n 的横坐标为 a_n.

(1) 求证: $a_n=\left(\dfrac{k}{k-1}\right)^n, n\in\mathbf{N}^*$;

(2) 求证: $a_n\geqslant 1+\dfrac{n}{k+1}$;

(3) 求证: $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{a_i}<k^2-k$.

【证明】 (1) 设切线过 $P(1,0)$ 时的切点为 $Q_1(a_1,\ a_1^k)$, 切线过 $P_1(a_1,0)$ 时的切点为 $Q_2(a_2,a_2^k)$, $\cdots\cdots$, 切线过 $P_{n-1}(a_{n-1},0)$ 时的切点为 $Q_n(a_n,a_n^k)$, 此时切线的斜率为 $y'=k\cdot a_n^{k-1}$, 切线方程为 $y-a_n^k=k\cdot a_n^{k-1}(x-a_n)$.

当$n=1$时, 切线过$P(1,0)$, $a_1=\frac{k}{k-1}$.

当$n>1$时, 切线过$P_{n-1}(a_{n-1},0)$, 即$0-a_n^k=ka_n^{k-1}(a_{n-1}-a_n)$, 得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{k}{k-1}$, ∴ 数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=\frac{k}{k-1}$, 公比为$q=\frac{k}{k-1}$的等比数列, 故$a_n=\left(\frac{k}{k-1}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(2) $a_n=\left(\frac{k}{k-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^n$

$=C_n^0+C_n^1\frac{1}{k-1}+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{k-1}\right)^n$

$\geqslant C_n^0+C_n^1\frac{1}{k-1}=1+\frac{n}{k-1}$.

(3) $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n-1}{a_{n-1}}+\frac{n}{a_n}$ ……①

$\frac{k-1}{k}\cdot S_n=\frac{1}{a_2}+\frac{2}{a_3}+\cdots+\frac{n-1}{a_n}+\frac{n}{a_{n+1}}$ ……②

两式相减得:

$\left(1-\frac{k-1}{k}\right)S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{n}{a_{n+1}}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$.

$$\therefore\ \frac{1}{k}S_n<\frac{\frac{k-1}{k}\left[1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^n\right]}{1-\frac{k-1}{k}}$$

$$<k-1,$$

∴ $S_n<k^2-k$, 即$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}<k^2-k$.

点评: 导数是教材新增内容, 由于导数的出现, 对研究函数的性质、求函数的最值带来很大的便利, 导数的几何性质也有着广泛的应用, 导数与数列交汇在一起综合出题, 属于新生事物, 由“导数的几何性质”开路, 找准解决问题的切入点,更突出了“数形结合”的解题思想.

五、数列与向量综合

例8　在平面直角坐标系中, 设向量$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a_1}$, 且$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{a_4}$, 且$\overrightarrow{a_n}=(x_n,y_n)$, 数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$分别是等差数列、等比数列, 求证: 四边形$ABCD$是平行四边形.

【解析】由题意知$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}=\overrightarrow{0}$,

即$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ y_1+y_2+y_3+y_4=0.\end{cases}$

∵ $\{x_n\}$是等差数列, 设公差为d,

∴ $x_1+x_1+d+x_1+2d+x_1+3d=0$,

∴ $x_1=-\frac{3}{2}d$.

$\{y_n\}$是等比数列, 设公比为q, ∵ $y_1\neq 0$,

∴ $y_1+y_1q+y_1q^2+y_1q^3=0$, ∴ $q=-1$,

∴ $\overrightarrow{a_1}=\left(-\frac{3}{2}d,y_1\right)$, $\overrightarrow{a_4}=\left(\frac{3}{2}d,-y_1\right)$,

∴ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$,

∴ 四边形$ABCD$是平行四边形.

六、数列与立体几何综合

例9　空间有n个平面, 其中任何两个平面都不平行, 三个平面不共线, 且所得的交线中任何2条都不平行, 任何3条都不共点, 这n个平面将空间分成多少部分?

【解析】设这n个平面把空间分成a_n个部分, 则$a_1=2$. 当平面由n个增加到$n+1$个时, 新增加的平面与原n个平面都相交, 有n条交线, 这n条交线将新增加的那个平面分成$\left[1+\frac{n(n+1)}{2}\right]$块, 其中每一块平面都使空间增加一部分, 于是 $a_{n+1}=a_n+\frac{n(n+1)}{2}+1$,

$$故a_n=\begin{cases}a_1, & n=1\\ a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1}), & n\geqslant 2\end{cases}$$

∴ $a_n=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$, 即$n$个平面将空间分成$\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$部分.

七、数列与排列组合综合

例10　n边形的边依次记为a_1, a_2, $\cdots$, a_n每条边都涂以红、黄、蓝三种颜色中的一种, 要使相邻两边的颜色互不相同, 有多少不同的涂色方法?

【解析】边a_1有3种涂法, 因a_2与a_1不同色, 故有2种涂法, a_3, a_4, $\cdots$, a_n边均有2种涂法. 依乘法原理, 共有$3\cdot 2^{n-1}$种涂法.

但这种涂法只能保证a_n与a_{n-1}不同色,

不能保证a_1与a_n不同色. 于是这样的涂法有两类.

第一类: a_1与a_n不同色, 符合题设条件的涂法有$S(n)$种;

第二类: a_1与a_n同色, 此时将a_n与a_1看成一边, 相当于对$n-1$边形作符合题设的涂色, 涂法有$S(n-1)$种, 从而$S(n)+S(n-1)=3\cdot 2^{n-1}$, 即

$S(n)-2^n=-[S(n-1)-2^{n-1}]$, 于是$\{S(n)-2^n\}$是以$-1$为公比的等比数列,

$\therefore$ $S(n)-2^n=(-1)^{n-3}\cdot[S(3)-2^3]$, $S(3)=6$, 则$S(n)-2^n=(-1)^{n-3}(6-8)$,

$\therefore$ $S(n)=2^n+(-1)^{n-2}\cdot 2$.

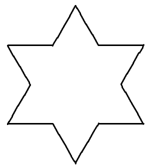
因此, 符合题设条件的涂法有

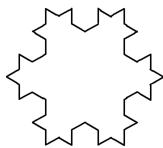
$2^n+(-1)^{n-2}\cdot 2$种.

点评: 在解决一些与自然数n有关的问题时, 或应用数学归纳法或考虑数列的递推公式, 要善于具体问题具体分析.

八、数列与实际问题结合

例11　一艘太空飞船飞往地球, 第一次观测时发现一个正三角形的岛屿(记其边长为1), 第二次观测时, 发现它并非正三角形而是每边中央$\frac{1}{3}$处向外有一个正三角形的海峡, 形成正六角形, 第三次观测时, 发现原先每一小边的中央$\frac{1}{3}$处都有一向外突出的海峡(如图1、2所示), ……, 把此过程无限继续下去, 就得到著名的数学模型—柯克岛.


图 1


图 2

(1) 把k次观测到的岛的面积记为a_k, $\{a_k\}$有无极限? 如果我们把此极限叫做岛的面积, 柯克岛的面积是多少?

(2) 把k次观测到的岛的海岸线长记为b_k, $\{b_k\}$有无极限? 如果把此极限当作柯克岛的海岸线长, 它是多少?

(3) 以上结果能说明什么问题?

【解析】(1) 记c_k为第k次观测时的边数, $c_1=3$, 由于每边中央突起一个三角形, 即每边分为4条边, 故$c_{k+1}=4c_k$, 从而第k次观测时, 柯克岛的边数是$3\times 4^{k-1}$. 边长记为d_k, 则

$d_1=1$, $d_k=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$, $a_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $a_2-a_1=3\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]=\frac{\sqrt{3}}{12}$, $a_{k+1}=a_k+(3\times 4^{k-1})\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right]^2=a_k+\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^k$.

$$\text{故 } a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{12}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{4}{9}}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

故极限存在, 且极限

$$a=\frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{1-\frac{4}{9}}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{5}\sqrt{3}.$$

(2) $b_n=(3\times 4^{n-1})\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ 为等比数列, 且公比大于1, 故$\{b_n\}$无极限.

(3) 以上结果说明了一个面积有限的平面区域的周界长度可能是无限长的.

点评: 此题以新的背景考察了数列、数列极限及无穷递缩等比数列的基本知识, 而最后一问又考察了概括能力、抽象能力及探索能力, 是一个有创新意识的题目.

九、数列与图表信息问题

例12　1996年甲、乙两网络公司的市场占有率均为A. 根据市场分析和预测, 甲公司第n年(1996年为第1年)的市场占有率$a_n=\frac{A}{40}(n^2-n+40)$; 乙公司自1996年起逐年的市场占有率都有所增加, 其规律如图3所示.

(下转第8–49页)

排列、组合习题讲评设计一例

315200 浙江省镇海中学 沈红正

通过精心设计, 可以把习题讲评在传授知识过程中所起的渗透数学思想、体现数学方法和技能的作用得到充分的发挥, 尽可能地使之成为高屋建瓴的"精品课", 使学生有所"思"、有所"行"、有所"得", 因而能成为提高学习能力的一条途径.

在一次高三的"排列、组合"单元练习中, 给出了这样一道题:

将数字1、2、3、4填入标号为1、2、3、4的四个方格里, 每格填一个数字, 则每个方格的标号与所填数字均不相同的填法有……( )

(A) 6种; (B) 9种; (C) 11种; (D) 23种.

在参加考试的82个学生(理科48人, 文科34人)中, 居然有47人(理科21人, 文科26人)选错. 对于错误率如此之高的试题当然要讲评, 但如何讲呢?通过调查分析,我设计了如下方案:

一、介绍解法, 以拓宽思路

解法一: 树图法(在选对的同学中有31人采用了这种方法), 通过树图(图略), 不难得到答案为B.

解法二: 间接法 (在选对的同学中有11人采用了这种方法), 如果没有任何限制条件, 则四个数填入四个格子中的方法有 $A_4^4 = 24$ 种; 考虑到其中有且仅有一个格子的标号与所填数字相同, 有 $C_4^1 \times 2 = 8$ 种; 有且仅有两个格子的标号与所填数字相同, 有 $C_4^2 = 6$ 种; 有且仅有三个格子的标号与所填数字相同, 即四个格子的标号与所填数字均相同, 有1种, 因此共有符合条件的填法有 $24 - 8 - 6 - 1 = 9$ 种.

解法三: 利用分步记数原理 (在选对的同学中有2人采用了这种方法), 可以分成三步考虑, 第一步, 填1号格子, 有3种填法; 第二步, 1号格子填的是数字几(如3)就填几号格子(如3号), 这样也有3种填法; 第三步, 余下的两个数字填余下的两个空格, 因为余下的两个数字和余下的两个空格标号至少有一个相同, 故只有1种填法, 因此共有 $3 \times 3 \times 1 = 9$ 种填法.

二、分析解法, 以澄清思想

在分析完上述三种解法后, 我发现学生感到很满足, 于是我给出了以下问题, 作为题目的变式, 让学生训练.

变式: 五位老师分别在五个班任教, 现派这五位老师分别到这五个班中的一个去监考, 但不监考自己任课的班, 问有多少种分派方法?

通过反馈得知, 凡采用"树图法"和"间接法"的同学都得到了正确的答案44, 而利用"分步记数原理"考虑问题的同学中有近80%的答案是48. 对此, 我没有直接告诉学生正确答案, 而是对上述三种解法作了一次深入地分析.

解法一虽然直观, 正确率高, 但画树图过繁, 尤其是数字较大时, 其可操作性不强; 因为有了原题的基础, 所以解法二在解决变式时显得很简单; 解法三在变式题中运用时, 不能照搬原题的过程. 应如下考虑:

第一步, 填1号格子, 有4种填法; 第二步, 1号格子填的是数字几(如3)就填几号格子(如3号), 这样也有4种填法; 但这步如果填的是1, 那下面只有2种填法; 如果这步填的不是1, 而是2、4、5中的一个, 那下面就有3种不同的填法, 故有 $4 \times 2 + 4 \times 3 \times 3 = 44$ 种. 从上面分析可知, 第三步的填法与第二步填什么数有关, 故 $4 \times 4 \times 3 = 48$ 是错误的, 所以, 运用解法三来解答这类问题时, 必须谨慎地使用好分类讨论. 另一方面, 随着数字的增大, 此解法的难度也将随之增大.

综上分析, 间接法在解决此类问题中比较有效, 但如果要计算8个元素时的情形, 那必须事先算出小于8时的答案,这样实在太花时间, 为此我们考虑如下问题:

将数字1, 2, 3, $\cdots$, $n(n\geqslant 2)$填入标号为1, 2, 3, $\cdots$, $n(n\geqslant 2)$的n个方格里, 每格填一个数字, 则每个方格的标号与所填数字均不相同的填法有多少种?

三、引申题目, 以升华思维

为了使问题更具一般性, 我们将问题引申为: 将编号为1, 2, 3, $\cdots$, $n(n\geqslant 2)$的元素放入编号为1, 2, 3, $\cdots$, $n(n\geqslant 2)$的格子内, 其中所指定的$k(1\leqslant k\leqslant n)$个格子的编号与所填元素的编号不同, 那么有多少种不同的填法?

1. 特例引路

为了研究上述引申的结果, 我们先考虑$n=8$, $k=1$、2、3时的三种特殊情形.

(1) 若$k=1$, 即所指定的1个格子的编号与所填元素的编号不同(如第一个方格不能填1号元素)时, 填法种数是$N_1=A_8^8-A_7^7$;

(2) 若$k=2$, 即所指定的2个格子的编号与所填元素的编号不同(如第一个方格不能填1号元素, 第二个方格不能填2号元素)时, 填法种数是$N_2=A_8^8-2A_7^7+A_6^6$;

(3) 若$k=3$, 即所指定的3个格子的编号与所填元素的编号不同(如第一个方格不能填1号元素,第二个方格不能填2号元素, 第三个方格不能填3号元素)时, 我们只需在N_2中减去第三格填3号元素的情形, 即减去$n=7$且$k=2$时的情形(此类情况可仿上计算), 故此时的填法数为$N_3=A_8^8-2A_7^7+A_6^6-(A_7^7-2A_6^6+A_5^5)=A_8^8-3A_7^7+3A_6^6-A_5^5$.

2. 观察结果

N_1有A_8^8和A_7^7两个全排列数相加项, 其系数是1、-1, 也就是C_1^0、$-C_1^1$;

N_2有A_8^8、A_7^7、A_6^6三个全排列数相加项, 其系数是1、-2、1, 也就是C_2^0、$-C_2^1$、C_2^2;

N_3有A_8^8、A_7^7、A_6^6、A_5^5四个全排列数相加项, 其系数是1、-3、3、-1, 也就是C_3^0、$-C_3^1$、C_3^2、$-C_3^3$.

3. 归纳猜想

从中我们发现其规律: 所指定的$k(1\leqslant k\leqslant n)$个格子的编号与所填元素的编号不同时, 填法种数的表达式中有A_n^n, A_{n-1}^{n-1}, $\cdots$, A_{n-k+1}^{n-k+1}, A_{n-k}^{n-k}等$k+1$个全排列数相加项, 其系数可以写成是C_k^0, $-C_k^1$, C_k^2, $-C_k^3$, $\cdots$, $(-1)^kC_k^k$,

即编号为1, 2, 3, $\cdots$, $n(n\geqslant 2)$的元素放入编号为1, 2, 3, $\cdots$, $n(n\geqslant 2)$的格子内, 其中所指定的$k(1\leqslant k\leqslant n)$个格子的编号与所填元素的编号不同的填法种数为: $N_k=C_k^0A_n^n-C_k^1A_{n-1}^{n-1}+\cdots+(-1)^kC_k^kA_{n-k}^{n-k}\,(1\leqslant k\leqslant n)$.

4. 证明结论

对k使用数学归纳法.

(1) 当$k=1$时, 同上述计算可知, 命题成立.

(2) 假设$k=m$时命题成立, 即编号为1, 2, 3, $\cdots$, $n(n\geqslant 2)$的元素放入编号为1, 2, 3, $\cdots$, $n(n\geqslant 2)$的格子内, 其中所指定的$m(1\leqslant m\leqslant n)$个格子的编号与所填元素的编号不同的填法种数为$N_m=C_m^0A_n^n-C_m^1A_{n-1}^{n-1}+\cdots+(-1)^mC_m^mA_{n-m}^{n-m}\,(1\leqslant m\leqslant n)$, 则当$k=m+1\,(m+1\leqslant n)$时, 多了一个条件(第$m+1$个格子不能填$m+1$号元素). 假设第$m+1$个格子填$m+1$号元素, 但第$i(1\leqslant i\leqslant m)$个格子仍不填$i(1\leqslant i\leqslant m)$号元素, 这时相当于编号为1, 2, 3, $\cdots$, $n-1\,(n\geqslant 2)$的元素放入编号为1, 2, 3, $\cdots$, $n-1\,(n\geqslant 2)$的格子内, 其中所指定的$m(1\leqslant m\leqslant n)$个格子的编号与所填元素的编号不同的填法种数, 由归纳假设可知这样的填法有$C_m^0A_{n-1}^{n-1}-C_m^1A_{n-2}^{n-2}+\cdots+(-1)^mC_m^mA_{n-1-m}^{n-1-m}$. 所以 $N_{m+1}=C_m^0A_n^n-C_m^1A_{n-1}^{n-1}+\cdots+(-1)^m\cdot C_m^mA_{n-m}^{n-m}-(C_m^0A_{n-1}^{n-1}-C_m^1A_{n-2}^{n-2}+\cdots+(-1)^mC_m^mA_{n-1-m}^{n-1-m})=C_m^0A_n^n-(C_m^1+C_m^0)\cdot A_{n-1}^{n-1}+(C_m^2+C_m^1)A_{n-2}^{n-2}-\cdots+(-1)^m(C_m^m+C_m^{m-1})A_{n-m}^{n-m}-(-1)^mC_m^mA_{n-(m+1)}^{n-(m+1)}=C_{m+1}^0\cdot A_n^n-C_{m+1}^1A_{n-1}^{n-1}+C_{m+1}^2A_{n-2}^{n-2}-\cdots+(-1)^m\cdot C_{m+1}^mA_{n-m}^{n-m}+(-1)^{m+1}C_{m+1}^{m+1}A_{n-(m+1)}^{n-(m+1)}$, 故当$k=m+1\,(m+1\leqslant n)$时, 命题成立.

通过上述分析、反思、归纳、猜想、证明等一系列的思维活动, 化解了疑虑, 提高了能力, 真正起到了习题讲评的作用.

【编者按】一年一度的上海市TI杯高二年级数学竞赛于2005年5月28日再次拉开序幕, 这是全国惟一允许使用计算器的赛事. 计算器型号不限, 包括可以编写程序的、拥有计算机代数操作系统(CAS)的图形计算器. 竞赛分个人赛和团体赛, 每个参赛学校指派3名学生参加团体赛, 参赛学生允许对试题讨论、分工和合作. 他们的个人赛成绩与团体赛得分的总和为学校团体总分.

本刊2002年第3期曾经报道了上海市(首届)TI杯高二年级数学竞赛, 2003年5月因非典原因停办一次, 今年举办的是第三届. 计算器的熟练使用已成为此赛事关注的热点之一. 现刊登本次大赛的试题和解答, 以飨读者.

2005年上海市TI杯高二年级数学竞赛试题与解答

个人竞赛题

(2005年5月28日上午9:00–10:30)

一、填空题(共8小题, 前4小题每题6分, 后4小题每题9分, 满分60分)

1. 计算:
$$3\left(1+\frac{1^2}{4\cdot6}+\frac{1^2\cdot3^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18}\right)=$$ ________(精确到0.0001).

2. 天文学中, 常用一个平太阳日表示一天, 一个平太阳日分为24个平太阳小时, 一个平太阳小时分为60个平太阳分, 一个平太阳分分为60个平太阳秒. 天文学计算地球的一个回归年等于S个平太阳日是用下面公式进行计算的: $S=365.2421988-0.0000000614(t-1900)$(平太阳日), 其中$t$是公元年份数, 按上述公式计算, 可求得2005年的一个回归年= ________平太阳日 ________平太阳时 ________平太阳分 ________平太阳秒(精确到1秒).

3. 比较大小: $\left(\frac{2004}{10}\right)^{2005}$ ___ $\left(\frac{2005}{10}\right)^{2004}$ (用“>”或“=”或“<”连接).

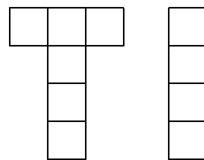
4. 设$\{a_n\}$是首项为1, 公差为2的等差数列, 若$\{a_n\}$的连续$k(k\geqslant2)$项的和为2005, 则k的值为________.

5. 我国经近三十年努力, 有效地控制了人口的过快增长, 2005年1月6日是中国13亿人口日. 根据统计, 我国1969年底人口是8.0671亿, 到1974年底人口是9.0859亿, 这5年的中国人口年均增长率是________; 若我国人口以这个年均增长率增长, 从1974年底到2004年底我们人口将比13亿多出________亿(精确到百万).

6. 已知$f(n)=2n+1$,
$$g(n)=\begin{cases}3, & 若n=1,\\ f[g(n-1)], & 若n\geqslant2,\end{cases}$$
其中$n\in\mathbf{Z}^+$, 则$g(12)$的值是________.

7. 一个三位数$\overline{abc}$满足$a-b^2+c^3=\overline{abc}$, 则这个三位数是________.

8. 将数1、2、3、4、5、6、7、8、9、10分别填入字母TI的十个空格内, 使一横(三个数)两竖(各4个数)中数的和都相等, 则满足这样条件的字母T一横三格中的数字连起来所组的三位数或四位数的最大值是________; 最小值________.



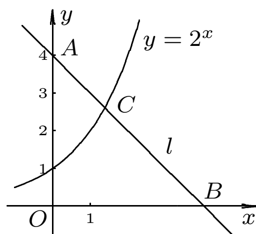
解答以下三题必须写出解题的必要步骤:

二、(本题满分20分)

已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$, 且$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{3}$ $(n\in\mathbf{Z}^+)$, 求使不等式$|a_{n+1}-a_n|<10^{-9}$成立的最小正整数n.

三、(本题满分20分)

如图, 已知直线l过点$A(0,4)$, 交函数$y=2^x$的图象于点C, 交x轴于点B, 若$AC:CB=2:3$, 求点B的横坐标(精确到0.01).



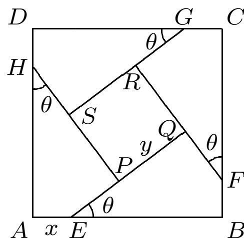
四、(本题满分20分)

如图, $ABCD$是边长为1的正方形, 点E、F、G、H顺次在边AB、BC、CD、DA上, 且$AE=BF=CG=DH=x$ $\left(0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$, 过点$E$、$F$、$G$、$H$分别作射线$EQ$、$FR$、$GS$、$HP$, 且$\angle QEB=\angle RFC=\angle SGD=\angle PHA=\theta$, 这里$\theta$为定角, 且$0<\theta\leqslant 45^\circ$, 这样得到四边形$PQRS$,

(1) $PQRS$是怎样的四边形? 证明你的结论;

(2) 设$PQ=y$, 试将y表示成x的函数;

(3) 是否存在角θ, 使$\dfrac{y}{x}$为与x无关的定值? 若存在, 求出相应的θ的值; 若不存在, 说明理由.



团体赛试题

(2005年5月28日上午11:00–11:30)

解答本试卷必须写出解题的必要步骤或计算器的算法.

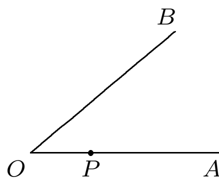
一、(本题满分20分)

已知$a>0,b>0$, 且$a^3+b^3=2$, 求$a+b$的取值范围.

二、(本题满分20分)

如图, 将$\angle AOB$的两边OA、OB视为平面反光镜, 如果$\angle AOB=40^\circ$, 在OA上一点P, $OP=10\text{cm}$, 过点P向OB射出一束光线在OB的点Q处反射后折回到OA, 在OA的点R处第二次反射后的反射光束RT恰好与边OB平行.

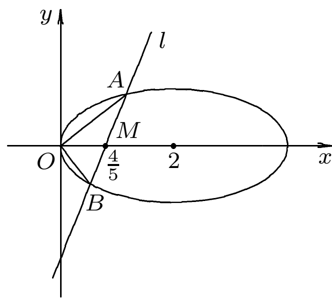
求$\angle APQ$的大小及OR的长度(精确到0.01cm).



三、(本题满分20分)

如图, 已知椭圆$\dfrac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$, 过点$M\left(\dfrac{4}{5},0\right)$的直线$l$交椭圆于点$A$、$B$,

求$\angle AOB$的大小范围.



个人赛试题解答

一、填空题

1. 3.1415;　2. 365, 5, 48, 45;

3. >;　4. 5;

5. 0.0241, 5.55;　6. 8191;

7. 337;　8. 7210, 489.

二、 $\because$ $a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$,

$\therefore$ $a_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}a_n-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}(a_n-1)$.

故$\{a_n-1\}$是以$\dfrac{2}{3}$为公比的等比数列.

又$a_1-1=1$,

$\therefore\ a_n-1=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ a_n=1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$

$|a_{n+1}-a_n|<10^{-9}$

$\iff \left|\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right|<10^{-9}$

$\iff \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<10^{-9}$

$\iff -\lg 3+(n-1)\lg\frac{2}{3}<-9$

$\iff n-1>\frac{9-\lg 3}{\lg 3-\lg 2}$

$\iff n>\frac{9-\lg 2}{\lg 3-\lg 2}\approx 49.4.$

$\therefore$ 所求的最小正整数n为50.

三、自C作x轴的垂线, 垂足为C', 则$\triangle BC'C\backsim\triangle BOA$.

$\therefore\ \frac{|BC'|}{|BO|}=\frac{|CC'|}{|AO|}=\frac{|BC|}{|BA|}.$

由题设, 得

$\frac{x_B-x_C}{x_B}=\frac{2^{x_C}}{4}=\frac{3}{5}.$

$\therefore\ x_C=\frac{\lg 12-\lg 5}{\lg 2}$, 且$x_B=\frac{5}{2}x_C$.

故$x_B=\frac{5}{2}\cdot\frac{(\lg 12-\lg 5)}{\lg 2}\approx 3.16.$

四、(1) 四边形$PQRS$为正方形.

证明如下: 连EF、FG、GH、HE.

$\because\ AE=BF=CG=DH=x,$

$AH=BE=CF=DG=1-x,$

$\therefore$ Rt$\triangle AEH\cong$Rt$\triangle BFE\cong$Rt$\triangle CGF\cong$Rt$\triangle DHG$. $\therefore\ \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4,$

$HE=GF=FG=GH,$

进而$\angle 5=\angle 6=\angle 7=\angle 8.$

又由题设可知$\theta+\angle BFQ=180^\circ$,

故$\angle EQF+\angle B=180^\circ$,

但$\angle B=90^\circ$, $\therefore\angle EQF=90^\circ$.

同理$\angle FRG=\angle GSH=\angle HPE=90^\circ$.

$\therefore$ Rt$\triangle HEP\cong$Rt$\triangle EFQ\cong$Rt$\triangle FGR\cong$Rt$\triangle GHS$, $EP=FQ=GR=HS$,

$HP=EQ=FR=GS$,

从而$PQ=QR=RS=SP$.

故$PQRS$是正方形.

(2) 设$FQ=z$, 则

$\frac{z}{EF}=\sin\angle 6=\sin(\theta-\angle 2)$

$=\sin\theta\cos\angle 2-\cos\theta\sin\angle 2$

$=\sin\theta\cdot\frac{1-x}{EF}-\cos\theta\cdot\frac{x}{EF},$

即$z=(1-x)\sin\theta-x\cos\theta$.

同理计算$\cos\angle 6$可得

$y+z=(1-x)\cos\theta+x\sin\theta.$

相减得$y=2x\sin\theta+(\cos\theta-\sin\theta)$, $\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

另解: 将折线EQF分别投影到AB和BC上, 可得

$$\begin{cases}(y+z)\cos\theta+z\sin\theta=1-x,\\(y+z)\sin\theta-z\cos\theta=x,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}y\cos\theta+z(\sin\theta+\cos\theta)=1-x,\\y\sin\theta+z(\sin\theta-\cos\theta)=x.\end{cases}$$

消去z, 即得

$y=2x\sin\theta+(\cos\theta-\sin\theta)$. $\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

(3) $\frac{y}{x}=2\sin\theta+\frac{\cos\theta-\sin\theta}{x}$,

欲使$\frac{y}{x}$是与x无关的常数, 必须且只须$\cos\theta-\sin\theta=0$, 即$\theta=45^\circ$.

$\therefore$当$\theta=45^\circ$时, $\frac{y}{x}$是与x无关的常数.

团体赛试题解答

一、令$u=a+b$, 则$u>0$, 且$b=u-a$, 代入$a^3+b^3=2$, 得

$a^3+u^3-3u^2a+3ua^2-a^3=2$,

即 $3ua^2-3u^2a+u^3-2=0$. (1)

上式可看作关于a的二次方程, u的取值的充要条件是方程(1)在$(0,u)$内有解.

令$f(a)=3ua^2-3u^2a+u^3-2$,

这个关于a的二次函数的对称轴为

$a=\dfrac{3u^2}{6u}=\dfrac{u}{2}$.

$$\therefore \begin{cases} f\left(\dfrac{u}{2}\right)=3u\cdot\dfrac{u^2}{4}-3u^2\cdot\dfrac{u}{2}+u^3-2\leqslant 0,\\ f(0)=u^3-2>0,\\ f(u)=3u^3-3u^3+u^3-2>0.\end{cases}$$

$\Longleftrightarrow \sqrt[3]{2}<u\leqslant 2$.

又解: 由$a^3+b^3=2, a>0, b>0$.

得$b^3=2-a^3$ $(0<a<\sqrt[3]{2})$,

$b=\sqrt[3]{2-a^3}$ $(0<a<\sqrt[3]{2})$,

令$y=a+b=a+\sqrt[3]{2-a^3}$ $(0<a<\sqrt[3]{2})$.

使用TI-83 Plus型计算器, 输入解析式

$y=(x+\sqrt[3]{2-x^3})/(x\geqslant 0$ and $x\leqslant\sqrt[3]{2})$,

作出图象并在图象基础上得到

当$x=1$时, 有$y_{\max}=2$;

当$x=0$时, 有$y_{\min}=1.259921$.

$\therefore 1.259921<x\leqslant 2$ (这里$1.259921\approx\sqrt[3]{2}$).

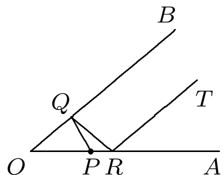
二、如果过图中点R的反射光线$RT/\!/OB$,

则$\angle TRA=\angle O=40^\circ$.

过点R作$\angle ORQ=\angle TRA=40^\circ$, 交$OB$于点$Q$, 则$\angle BQR=80^\circ$.

过点Q作$\angle OQP=80^\circ$, 交OA于P.

$\therefore \angle APQ=120^\circ$.



在$\triangle OPQ$中, $\angle OPQ=60^\circ$, $\angle OQP=80^\circ$, $OP=10\,\text{cm}$,

由$\dfrac{OQ}{\sin 60^\circ}=\dfrac{10}{\sin 80^\circ}$

$\Longrightarrow OQ=\dfrac{10\sin 60^\circ}{\sin 80^\circ}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}$;

在$\triangle OQR$中, $\angle OQR=100^\circ$, $\angle ORQ=40^\circ$,

由$\dfrac{OR}{\sin 100^\circ}=\dfrac{OQ}{\sin 40^\circ}$

$\Longrightarrow OR=\dfrac{OQ\sin 100^\circ}{\sin 40^\circ}=\dfrac{5\sqrt{3}\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ\sin 40^\circ}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin 40^\circ}=13.47\,(\text{cm})$.

三、 设直线l与椭圆交点坐标分别为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.

(i) 当直线l斜率不存在时, $AB\perp x$轴.

此时$x_1=x_2=\dfrac{4}{5}$,

由$\dfrac{\left(\dfrac{4}{5}-2\right)^2}{4}+y^2=1$, 解得

$y_1=\dfrac{4}{5}$, $y_2=-\dfrac{4}{5}$.

$\therefore A\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{4}{5}\right)$、$B\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$.

显然有$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$.

(ii) 当直线l的斜率为$k\,(k\neq 0)$时,

点A、B坐标由方程组

$$\begin{cases}\dfrac{(x-2)^2}{4}+y^2=1, & ①\\ y=k\left(x-\dfrac{4}{5}\right) & ②\end{cases}$$

所确定.

② 代入 ① 整理得

$25(4k^2+1)x^2-20(8k^2+5)x+64k^2=0$,

$x_1+x_2=\dfrac{4(8k^2+5)}{5(4k^2+1)}$,

$x_1x_2=\dfrac{64k^2}{25(4k^2+1)}$.

由 ② 得 $x=\dfrac{5y+4k}{5k}$, 代入 ① 整理得

$25(4k^2+1)y^2-60ky-64k^2=0$,

$y_1+y_2=\dfrac{12k}{5(4k^2+1)}$,

$y_1y_2=-\dfrac{64k^2}{25(4k^2+1)}$.

$\because k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-1$,

$\therefore \angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$.

综合(i)、(ii)得 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$.

让"神奇的π"教学在数学实验中生动起来

224100 江苏省大丰高级中学(安徽师范大学02级教育硕士) 彭兴俊

普通高中数学课程标准(实验稿)对数学史的教学提出了明确要求:"通过生动、丰富的事例, 了解数学发展过程中若干重要事件、重要人物与重要成果, 初步了解数学产生与发展的过程, 体会数学对人类文明发展的作用, 提高学习数学的兴趣, 加深对数学的理解, 感受数学家的严谨态度和锲而不舍的探索精神." 并指出教学方式应灵活多样. 众多的数学期刊(有的开辟了专栏)介绍了大量生动的数学史料, 但对如何进行数学史教学少有建议. 如果能在数学史教学中, 借助于现代信息技术再现数学家探索数学奥秘的艰辛历程和闪光智慧, 就可使学生深刻感受到数学史中所蕴含的思想性、数学家刻苦钻研的科学精神.

本文拟以"神奇的π"为主题, 借助多媒体手段, 以数学实验的方式模拟展现众多数学家在圆周率π的产生、发展过程中所付出的艰辛劳动, 从而激发学生的科学精神. 这节专题安排在"概率"内容结束时较为适宜.

本文的一些史料主要源自文[1]、[2], 模拟实验由Flash MX制作完成.

第一部分 π的传奇——贯穿古今到永远

德国的一位数学家曾经说过:"历史上一个国家所算得的圆周率的准确程度, 可以作为衡量这个国家当时数学发展的一个标志." 千百年来, 人们总是试图把π算到小数后越来越多的位数. 在《圣经》和《编年史》中, π的值给出为3. 埃及数学家求出π的近似值为3.16. 公元150年, 托勒密给出了π的估值为3.1416. 阿基米德通过增加内接多边形边数的方法, 近乎准确地得出π的值介于$3\frac{1}{7}$与$3\frac{10}{71}$之间. 中国古代从先秦时期开始, 一直是取"周三径一"(即$\pi=3$)的数值来进行有关圆的计算, 东汉的张衡从研究圆与它的外切正方形的关系着手得到圆周率$\pi=\sqrt{10}\approx 3.1623$.

英国数学家威廉·向克斯花了20年时间用手工把π算到了小数点后707位, 然而不幸的是, 其中第528位起算错了, 但这一错误直至1948年才被美国少年W·约翰和英国数学家D·F·费古逊发现, 他们发表了π的808位的小数值. 由于当时没有有效的计算机, 可想而知这是一项何等单调乏味的工作.

几个世纪以来, 对π估值的竞赛一直在继续. 这里似乎没有冬天, 有的只是一条无尽的探索之路! π的估值的位数在不断地增多. 由G·楚得诺夫斯基和D·楚得诺夫斯基达到的5亿3千万位似乎是一个纪录, 但没保持多久便被金田康正打破. 金田康正在1989年8月把π算到了536 870 000位. 这个π值填满了11万张计算机纸, 并在日本最快的超级计算机上用了67小时又13分钟. 也许有一天, 计算机的能力和容量都发挥殆尽, 那么对π的估值或许也能就此休止.

为什么人们希望把π的值算到小数点后百万位, 就像人们今天用超级计算机所做的那样呢? 又为什么π的小数值有如此的魅力呢?

(1) 它可以检验超级计算机的硬件和软件的性能.

(2) 计算的方法和思路可以引发新的概念和思想.

(3) π的数字展开中某些数字出现的频率会比另一些高吗? 或许它们并非完全随意?

第二部分 割圆术——极限思想显光辉

魏晋时期数学家刘徽在批判总结了数学史上各种旧的计算方法之后, 创造出一种崭新的方法——"割圆术", 也即用圆内接正多边形的

周长去无限逼近圆周长, 并以此求取圆周率的方法. 他从圆内接正六边形开始割圆, "割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至不可割, 则与圆周合体, 而无所失矣." 越是把圆周分割得细, 误差就越少, 其内接正多边形的周长就越是接近圆周. 如此不断地分割下去, 一直到圆周无法再分割为止, 也就是到了圆内接正多边形的边数无限多的时候, 它的周长就与圆周"合体"而完全一致了.

按照这样的思路, 刘徽把圆内接正多边形的面积一直算到了正3072边形, 并由此而求得了圆周率为3.14和3.1416这两个近似数值. 这个结果是当时世界上圆周率计算的最精确的数据. 刘徽以极限思想为指导, 提出用"割圆术"来求圆周率, 既大胆创新, 又严密论证, 从而为圆周率的计算指出了一条科学的道路. 到了南北朝时期, 祖冲之在刘徽的这一基础上继续努力, 终于求得了圆周率为$3.1415926<\pi<3.1415927$, 精确到了小数点以后的第七位.

利用Flash MX中的绘图函数, 可以模拟"割圆术"实验, 构造不断变化的圆内接正多边形.

第三部分　蒲丰投针——偶然之中蕴必然

计算π的最为稀奇的方法之一, 要数18世纪法国的博物学家C·蒲丰和他的投针实验: 在一个平面上, 用尺画一组相距为d的平行线; 一根长度为l的针, 扔到画了线的平面上; 如果针与线相交, 则该次扔出被认为有利的, 否则是不利的. 蒲丰惊奇地发现: 有利扔出与不利扔出的次数之比是一个包含π的表示式, 即有利扔出的概率为$\frac{2}{\pi}\left(=\frac{nl}{md}\right)$. 在公元1901年, 意大利数学家拉兹瑞尼作了3408次投针, 给出了π的值为3.1415929——准确到小数后6位, 但也有数学家对此结果的来源提出疑议.

利用Flash MX中的随机函数可以模拟蒲丰投针实验, 随机设置短线出现的位置、角度, 从而产生随机投针的效果.

第四部分　数列求和——相伴相随到无限

德国数学家莱布尼兹证明了如下公式:

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\right)=4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}.$$

一个无限数列的和居然与无限不循环的π相等, 真是令人叹为观止. 这个公式的证明为π值的计算提供了一个较好的方法. 只是这个方法到后来随n增大而提高精确度的速度太慢, 导致数学家另寻更为快捷的方法.

数列求和模拟实验设计思想: 利用Flash MX中的循环函数可以模拟数列求和实验, 对数列$\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right\}$逐项求和.

参考文献

[1] T·帕帕斯. 数学趣闻集锦(上、下)[M]. 张远南、张昶译. 上海教育出版社. 1998.12(1).

[2] 李尚志等. 数学实验[M]. 高等教育出版社. 1999.9(1).

(上接第8-25页)

不同色, 只有$m-1$种颜色供选涂, 由推广3′知有$(m-2)^n+(-1)^n(m-2)$种, 故有

$$B_n=m[(m-2)^n+(-1)^n(m-2)].$$

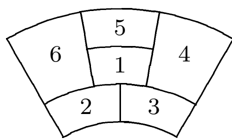


图 8

注: 2003年新课程卷高考题(理科): 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为6个部分(如图8), 现要栽种4种不同颜色的花, 每部分栽种1种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 则不同的栽种方法有______种.

此题是推广4的特例:

$$B_5=4[(4-2)^5+(-1)^5(4-2)]=120.$$

参考文献

[1] 数学问题与解答. 数学教学. 2004年第12期.

香港五日行

张奠宙

7月6–8日, 我应邀出席“香港数学会2005年会”. 5日经深圳, 由荔园小学魏彬老师陪同过关, 顺利到达位于大埔的香港教育学院. 此后的三天, 便在风光旖旎的海滨度过. 会议日程紧张, 大会套小会, 没有旅游、文艺活动.

10个大会报告是这次会议的主要内容. 我觉得安排得相当丰富、有效.

第一个报告是英国伦敦大学的M·布朗教授. 她的演讲报告了“为什么英国儿童数学成绩较差原因分析”的结果. 报告动用了国际调查的各种数据, 剖析了各种原因. 可惜, 她的结论是原因太多, 无法确定哪种原因是最主要的. 相对来说, 她依然认为教学风格对学生的影响最重要.

香港大学莫雅慈博士的演讲题目是“从上海的三堂课看华人如何学数学”. 她认为文化传统是影响华人学习数学的主要因素. 从外部看, 香港和上海的数学教学差不多. 但是从华人内部的角度看, 细节的差异很大. 不过, 她认为上海和香港的数学教学风格各有特点, 都好.

香港中文大学黄毅英博士的演讲, 涉及近几年来世界各国的数学课程改革, 内容广泛. 他列举了在各国数学课程标准中出现的特别词汇有: “高级思维”、“通用技能”、“价值”、“现实生活数学”、“兴趣、自信和态度”、“个别差异”、“信息技术”. 这一简单的列举, 描述了21世纪数学课程改革的一种时尚.

香港大学梁贯成和韩国Hongik大学的朴昊美(Kunmee Park)两位名家合作, 就“东亚数学教学是否存在着特征?”为题, 运用TIMSS的教学录象资料进行分析. 他们的结论是, 东亚国家确实有一些共同特征: 例如, 教师在课堂上处于控制地位, 而学生仍然积极学习; 探索数学强调变式等. 他们对变式数学给予很高评价.

有两位报告人来自台湾地区. 台湾师大的著名数学史教授洪万生的报告, 涉及到如何加强中学数学教师的职业发展的问题. 中山大学的梁淑坤教授则报告了如何运用网络培训教师的经验. 这种培训在职教师的经验值得我们学习.

中国数学教育界的老朋友J·贝克目前在台北师范学院, 他和黄幸美教授合作进行“开放题研究”. 他在会上报告了一些新开发的数学开放题.

由大陆去美国的数学教育专家蔡金法和马立平也到会演讲. 特拉华大学教授蔡金法报告了他在美国进行“有效数学教学”研究的成果. 这是我特别感兴趣的. 不过, 他的研究倾向于从一般教育的角度加以阐述. 例如, 如何制定学习目标, 教师如何发挥作用等等. 我则觉得数学教学的有效性, 关键在对于数学本质的把握、揭示与体验.

马立平博士因她的成名著作(已经发行5万册)蜚声海内外. 我们早就互相知道, 却在香港才第一次见面. 她在大会的演讲题目是“美国小学数学教学内容体系瓦解三步曲”. 报告认为, 通过杜威的进步教育、新数学运动, 以及1980年代的改革, “算术”体系瓦解, 知识呈现“股状化”, 这使得美国数学教育事倍功半, 甚至劳而无功. 演讲的最后, 她说:“至少在小学教学领域, 美国的模式未必合理, 望国内和国外的同行三思”. 我们彼此的感觉是“道相同”. 她已经答应我, 将她这篇文章(中文稿)在大陆发表.

(下转第8–3页)

数学问题与解答

2005年第6期问题解答

646. 如图1, 在$\triangle ABC$中, $\angle C = 4\angle A$, CD是角平分线, 且$AD = DC + BC$, 求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的大小.

图 1

解: 延长CB到E, 连结AE, 使$\angle EAB = \angle BAC$, 连结DE. D为$\triangle EAC$的内心, 从而$\angle AED = \angle CED$.

记$\angle BAC = \angle EAB = \alpha$, 则$\angle ACD = \angle BCD = 2\alpha$, $\angle ACE = 4\alpha$.

延长BC到F, 使$CF = DC$. 连结DF, 则$\angle CDF = \angle F = \alpha = \angle EAD$. 又$ED$为公共边, $\therefore$ $\triangle AED \cong \triangle FED$, $AD = FD$.

由已知, $FD = DC + BC = CF + BC = FB$, $\angle FDB = \angle FBD$. 又$\angle FDB = \angle CDF + \angle BDC = \alpha + \angle DAC + \angle ACD = \alpha + \alpha + 2\alpha = 4\alpha$.

$\therefore$ $\angle FBD = 4\alpha$, 在$\triangle FDB$中, $\angle F + \angle FDB + \angle FBD = \alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 20^\circ$.

$\therefore$ $\angle BAC = 20^\circ$, $\angle ABC = \angle ACB = 80^\circ$.

647. 若实数a满足$a^9 - a^5 + a = 2$, 求证: $\sqrt[12]{3} < a < \sqrt[5]{2}$.

证: $\because$ $a(a^8 - a^4 + 1) = 2$ ……………… ①

$\therefore$ $a[(a^4-1)^2 + a^4] = 2$ ……………… ②

由 ② 知$a > 0$, 且$a \neq 1$. 由 ① 知

$a^8 - a^4 + 1 = \dfrac{2}{a}$ ……………… ③

由已知可得 $a^{12} - a^8 + a^4 = 2a^3$ …… ④

③ + ④ 可得

$$a^{12} + 1 = 2a^3 + \frac{2}{a}$$
$$= 2a^3 + \frac{2}{3a} + \frac{2}{3a} + \frac{2}{3a} \geqslant \sqrt[4]{\frac{16}{27}} > 2,$$

$\therefore$ $a^{12} > 1$, $a > 1$.

又$f(x) = 2x^3 + \dfrac{2}{x}$在$[1, +\infty)$上是增函数, $\therefore$ $f(a) > f(1) = 4$, 即$a^{12} + 1 > 4$, $a > \sqrt[12]{3}$.

另一方面, $2 = a^9 + a - a^5 > 2a^5 - a^5 = a^5$.

综上所述, $\sqrt[12]{3} < a < \sqrt[5]{2}$.

648. 设p_1、$p_2 \in \mathbf{Z}^+$, $p_1 < p_2$, 若存在a、$b \in \mathbf{Z}^+$, 使得$p_1 = a^2 + 1$, $p_2 = b^2 - 1$, 则对$n \in \mathbf{Z}^+$, 当$p_1 n + r_1$和$p_2 n + r_2$ (r_1、$r_2 \in \mathbf{Z}^+$, $r_1 < p_1$, $r_2 < p_2$)均为平方数且$p_2 r_1 > p_1 r_2$时, 数$(p_1 + p_2)n + (r_1 + r_2 + p_2 r_1 - p_1 r_2)$必非质数.

证: 由条件, 存在正整数k、m ($k > 1$, $m > 1$), 使得$p_1 n + r_1 = k^2$, 且$p_2 n + r_2 = m^2$, 故

$$n = \frac{k^2 - r_1}{p_1} = \frac{m^2 - r_2}{p_2}$$
$$= \frac{k^2 + m^2 - (r_1 + r_2)}{p_1 + p_2} \text{ ……………… ①}$$

于是有 $(p_1 + p_2)n + (r_1 + r_2 + p_2 r_1 -$

$p_1r_2) = k^2 + m^2 + p_2r_1 - p_1r_2$, 再由 ① 还可得 $p_2(k^2 - r_1) = p_1(m^2 - r_2)$, 即

$$p_2r_1 - p_1r_2 = p_2k^2 - p_1m^2 \cdots\cdots ②$$

再由 $p_1 = a^2 + 1$, $p_2 = b^2 - 1$, 可得

$$\begin{aligned}&(p_1+p_2)n + (r_1 + r_2 + p_2r_1 - p_1r_2)\\&= k^2 + m^2 + p_2k^2 - p_1m^2\\&= (p_2+1)k^2 - (p_1-1)m^2\\&= b^2k^2 - a^2m^2\\&= (bk+am)(bk-am) \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

另一方面, $k^2 > p_1 = a^2 + 1$,

$(a-m)^2 + k^2 > a^2 + 1$,

$m^2 + k^2 > 2am + 1$.

而由 ② 及 $p_2r_1 > p_1r_2$, 又有 $p_2k^2 > p_1m^2$, 即 $(b^2-1)k^2 > (a^2+1)m^2$.

于是 $b^2k^2 - a^2m^2 > m^2 + k^2 > 2am + 1$, 故 $b^2k^2 > (am+1)^2$, $bk > am + 1$.

因此, 由 ③ 便知 $(p_1+p_2)n + (r_1 + r_2 + p_2r_1 - p_1r_2)$ 为合数.

649. 非负实数 a、b、c、d 满足 $a^3+b^3+c^3+d^3 = 1$, 求证: $\frac{a^2}{1+bcd} + \frac{b^2}{1+cda} + \frac{c^2}{1+dab} + \frac{d^2}{1+abc} \geqslant 1$.

证: 应用三元、四元均值不等式, 得

$$\begin{aligned}&a + abcd \leqslant a + a\cdot\frac{1}{3}(b^3+c^3+d^3)\\&= a + \frac{1}{3}a(1-a^3) = \frac{1}{3}(4\cdot1\cdot1\cdot1\cdot a - a^4)\\&\leqslant \frac{1}{3}(1^4+1^4+1^4+a^4-a^4) = 1,\end{aligned}$$

同理 $b + abcd \leqslant 1$, $c + abcd \leqslant 1$, $d + abcd \leqslant 1$.

于是当 $abcd \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{1+bcd} + \frac{b^2}{1+cda} + \frac{c^2}{1+dab} + \frac{d^2}{1+abc}\\&= \frac{a^3}{a+abcd} + \frac{b^3}{b+abcd} + \frac{c^3}{c+abcd} + \frac{d^3}{d+abcd}\\&\geqslant a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 1.\end{aligned}$$

当 a、b、c、d 中有零, 例如 $a = 0$ 时, 也有 $\frac{a^2}{1+bcd} + \frac{b^2}{1+cda} + \frac{c^2}{1+dab} + \frac{d^2}{1+abc} = b^2 + c^2 + d^2 \geqslant b^3 + c^3 + d^3 = 1$.

650. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正实数, 则

(1) 当 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geqslant n-1$ 时, $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$;

(2) 当 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} < n-1$ 时, $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} > 1$.

证: (1) 令 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = \lambda$, 则 $\lambda \geqslant n-1$. 不等式 (1) 等价于

$p_1 = (1+\lambda)\sum\limits_{i=1}^{n}(1+x_1)\cdots(1+x_{i-1})(1+x_{i+1})\cdots(1+x_n) - n(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 0$.

用 $\sum x_1x_2\cdots x_i$ 表示 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 中 i 个的积共 C_n^i 个之和, 则

$$\begin{aligned}p_1 &= [(1+\lambda)n - n] + [(1+\lambda)(n-1) - n]\sum x_1\\&+[(1+\lambda)(n-2) - n]\sum x_1x_2 + \cdots\\&+[(1+\lambda)(n-i) - n]\sum x_1x_2\cdots x_i + \cdots\\&+[(1+\lambda) - n]\sum x_1x_2\cdots x_{n-1}\\&-nx_1x_2\cdots x_n\\&= \left\{\sum_{i=0}^{n-1}[(1+\lambda)(n-i) - n]\sum x_1x_2\cdots x_i\right\}\\&-n\lambda^n.\end{aligned}$$

由均值不等式有

$$\begin{aligned}&\sum x_1x_2\cdots x_i\\&\geqslant C_n^i\left[(x_1x_2\cdots x_n)^{C_{n-1}^{i-1}}\right]^{\frac{1}{C_n^i}}\\&= C_n^i(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{i}{n}} = C_n^i\lambda^i.\end{aligned}$$

又 $\because$ $\lambda \geqslant n-1$, $\therefore$ 当 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 时, 有 $(1+\lambda)(n-i) - n \geqslant 1 + \lambda - n \geqslant 0$.

于是

$$\begin{aligned}p_1 &\geqslant \left\{\sum\nolimits_{i=0}^{n-1}[(1+\lambda)(n-i) - n]C_n^i\lambda^i\right\} - n\lambda^n\\&= (1+\lambda)\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\lambda^iC_n^i - n\sum_{i=0}^{n}\lambda^iC_n^i\\&= (1+\lambda)\sum_{i=0}^{n-1}n\lambda^iC_{n-1}^i - n(1+\lambda)^n\\&= (1+\lambda)n(1+\lambda)^{n-1} - n(1+\lambda)^n = 0.\end{aligned}$$

故 (1) 成立.

(2) 令 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = \lambda$, $x_i = \lambda y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 则 y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为正数, 且 $y_1y_2\cdots y_n = 1$. (1) 变成:

当 $\lambda \geqslant n-1$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda y_i} \geqslant \frac{n}{1+\lambda}$.

特别地, 当 $\lambda = n-1$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(n-1)y_i}\geqslant 1.$$

因此, 当$0<\lambda<n-1$时, $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda y_i}>\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(n-1)y_i}\geqslant 1$, 即(2)成立.

2005 年第8 期问题

651. 如图2, 凸四边形$ABCD$中, 边AB、DC的延长线交于点E, 边BC、AD的延长线交于点F, 若$AC\perp BD$, 求证: $\angle EGC=\angle FGC$.

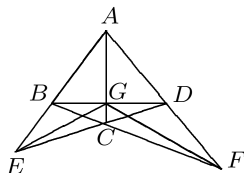


图 2

(安徽　储令标　陶家宏供题)

652. 如图3, 在$\triangle ABC$中, AD为BC边上的中线, BE、CF分别为AC、AB上的高, 设BE、CF交于M, BC、EF交于N, 求证: $MN\perp AD$.

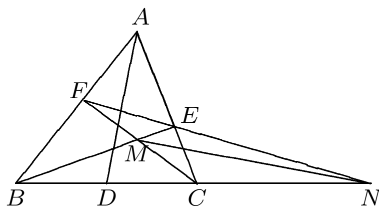


图 3

(浙江　闵　飞供题)

653. 已知数列$\{x_n\}$满足$x_1=1$, $x_{i+1}-x_i=\sqrt{x_{i+1}+x_i}$ $(i=1,2,\cdots)$, 求数列$\{x_n\}$的通项公式.

(江苏　李广修供题)

654. 设x、y、$z\in\mathbf{R}^+$, 且$x+y+z=k$. 当$k\leqslant 1$时, 求

$$u=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\sqrt{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}\right)$$

的最小值.

(四川　蒋明斌供题)

655. 设a、b、c、d皆为正实数, 求证:

$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+d}+\frac{c}{2d+a}+\frac{d}{2a+b}\geqslant\frac{4}{3},$$

等号当且仅当$a=b=c=d$时成立..

(安徽　郭要红供题)

(本栏目责任编辑　李大元　汪纯中)

(上接第8–37页)

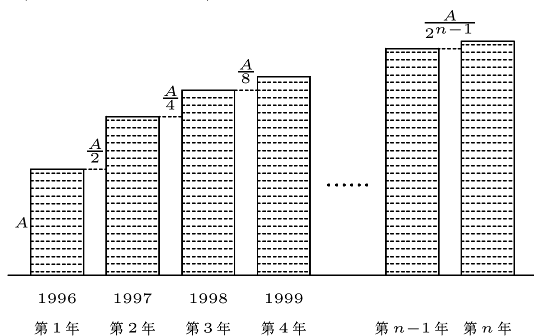


图 3

(1) 分析图3, 求出乙公司第n年市场占有率的表达式;

(2) 根据甲、乙两网络公司所在地的市场规律, 如果某公司的市场占有率不足另一个公司市场占有率的20%, 则该公司将被另一个兼并, 经计算, 2015年之前, 不会出现兼并局面, 试问2015年是否会出现兼并局面? 并说明理由.

【解析】(1) 设乙公司第n年的市场占有率为b_n, 分析图形可得: $b_n=A+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2^2}A+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}A=\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)A$.

(2) 依题意, 2015年为第20年, 则

$$a_{20}=\frac{A}{40}(20^2-20+40)=\frac{21}{2}A>10A,$$

$$b_{20}=\left(2-\frac{1}{2^{19}}\right)A<2A,$$

$$\therefore\ \frac{b_{20}}{a_{20}}<\frac{2A}{10A}=20\%,\ b_{20}<a_{20}\cdot 20\%.$$

可见, 2015年出现乙公司被甲公司兼并的局面.

点评: 本题具有浓厚的时代气息, 渗透实际问题的统计功能, 通过数表的分析及信息的处理, 转化为数字问题加以解决, 体现“数形结合”的解题功能.

编后漫笔

知己知彼, 百战百胜

——祝《华人如何学习数学》中文版问世

张奠宙　赵小平

各位读者在拿到本期杂志时, 在上海举行的第三届东亚数学教育会议上, 江苏教育出版社推出了《华人如何学习数学》一书的中文版. 这是华人数学教育界的一件要事, 也是一座重要的学术里程碑.

近百年来, 我们的数学教育理论和实践总是单向地从国外输入. 华人地区学者主要在"数学教育"的国际超市里挑选各种产品, 当作绝对真理拿来应用. 至于中国和海外华人地区自己的数学教育, 尽管经验不少, 却很少认真去总结. 连自己的长处在哪里都不知道, 遑论向外输出? 故在数学教育上, 我们一直是"入超".

1990年代开始, 华人的数学学习引起了世人的关注. 国际数学教育测试(IAEP, TIMSS, PISA)一再证明了华人地区学生的数学成绩十分优秀. 但是另一方面, 华人的数学学习给人的印象是停留在记忆、模仿、练习、考试等缺乏主动性的学习层面. 在数学教育研究领域内, 也很少听到华人的声音. 这就是本书中常常提到的"中国学习者悖论". 西方的学者率先对这一悖论进行探究, 一系列的著作随之诞生. 1996年, 时任香港大学教授的澳大利亚心理学家沃特金斯和别格出版了《华人学习者:文化在心理和传承上的影响》(Watkins D. & Bigg J. (1996): The Chinese learner: Culture psychological and contextual influences. Hong Kong: CERC & ACER.), 对"中国学习者"给予正面评价. 人们自然要想, 虽然外部的观察会比较客观和清醒, 但内部的审视一定会更真切、更深刻. 于是, 在21世纪之交, 华人数学教育学者行动起来了, 其中包括一批接受西方科学训练的年轻学者. 他们为寻求这一悖论的答案, 以极大热情进行多方位的探索. 以圈内人的视角, 回答了"华人怎样学习数学"的问题.

本书的英文版在2004年底出版, 反响热烈. 著名数学教育专家A·毕晓普发表了长篇书评(中译文见《数学教育学报》2005年第二期). 短短数月, 已经着手第二次印刷. 中文版的迅速推出, 反映出国内学者对此的关注.

知己知彼, 百战百胜. 近年来数学教育改革的一个缺点就是对自己了解不够. 我们希望中文版的问世能对于克服这一缺点有所帮助.

另外, 恐怕不仅是数学教育要这样做, 我们整个教育界(从领导、学者到第一线的教育实践者)是否也要多多认识自己呢? "言必称外国"的现象还是很严重的啊!

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

2005年第8期

(总第215期)

主编: 张奠宙　赵小平

常务副主编: 忻重义

电　话: 021–62232712

主办单位: 华东师范大学

出　　版: 《数学教学》编辑部

邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)

广告许可证: 沪工商广字 07017 号

印　　刷: 华东师范大学印刷厂

国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局

国内订阅: 全国各邮电局

电子信箱: sxjxzz@math. ecnu. edu. cn

定价: 3.80元　国内统一刊号: CN31–1024/G4　每月12日出版　代号: 4–357